

DESVIOS EM RELAÇÃO AO MODELO DE BLACK & SCHOLES: ESTUDOS RELACIONADOS À VOLATILIDADE DOS ATIVOS SUBJACENTES ÀS OPÇÕES.

Cláudio Santoro Lanari

Antônio Artur de Souza

João Luis Correia Duque

NUFI – Núcleo de Ensino, Pesquisa e Consultoria em Finanças e Contabilidade - CEPEAD – Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
Rua Curitiba, 832, 10^o. Andar – sala 1.010 CEP 30170 – 120 - Belo Horizonte - MG
Tel/faz: (031) 271-5087 E-mail: cslanari@face.ufmg.br

ABSTRACT: The derivatives, or securities derived from other assets or securities, can be conceived in a variety of forms, being classified basically in four groups: futures, options, swaps and products matched between derivatives and assets or securities, or only between derivatives. The central problem for the commercialisation of an option contract is the determination of its premium, or either, its price. Many mathematical models have been developed with the objective of calculating the premium to be paid in an option contract. One of these models was developed by Black & Scholes and has great acceptance in the financial market of options, due to its simplicity of calculation, and also for being independent of the level of risk of the investor. The objective of this article is to present that many research has been carried out aiming at detecting the deviations of the option values established in the capital market in comparison to the values that would be generated from the Black & Scholes model. One of these deviations, called smile effect, related to the variation of the implicit volatility of the underlying assets or securities, has been investigated in different contexts throughout the world, and will be investigated in the Brazilian capital market. These deviations indicate that the market systematically does not consider the theoretical option value, or, else, that the premises of the Black & Scholes model may be wrong.

KEYWORDS: Smile effect, implied volatility, Black & Scholes model.

RESUMO: Os derivativos, ou produtos derivados de outros ativos, podem ser concebidos das mais diversas formas, sendo agrupados, basicamente, em quatro grupos: futuros, opções, *swaps* e

produtos combinados entre derivativos e ativos, ou somente entre derivativos. O problema central para a comercialização de um contrato de opção é a determinação de seu prêmio, ou seja, seu preço. Diversos modelos matemáticos têm sido desenvolvidos com o objetivo de calcular o prêmio a ser pago em um contrato de opção. Um destes modelos foi desenvolvido por Black & Scholes e tem grande aceitação no mercado financeiro de opções devido a sua simplicidade de cálculo, e também por ser independente do nível de risco do investidor. Muitas pesquisas têm sido desenvolvidas no sentido de detectar os desvios dos valores de opções estabelecidos no mercado em relação aos valores que seriam obtidos a partir do modelo de Black & Scholes. Um destes desvios, o efeito “sorriso”, relacionado à variação da volatilidade implícita dos ativos subjacentes às opções, tem sido verificado em diferentes contextos a nível mundial, e será investigado no mercado brasileiro. Estes desvios indicam que o mercado sistematicamente desconsidera o valor teórico das opções, ou, então, que os pressupostos utilizados no desenvolvimento do modelo de Black & Scholes não estão corretos.

1 - INTRODUÇÃO

Os derivativos, ou produtos derivados de outros ativos, podem ser definidos como instrumentos financeiros cujo valor deriva ou depende de outro título ou ativo, financeiro ou não (HULL, 1997). Tais instrumentos financeiros podem ser concebidos das mais diversas formas, sendo agrupados, basicamente, em quatro grupos: futuros, opções, *swaps* e produtos combinados entre derivativos e ativos, ou somente entre derivativos. A utilização dos derivativos geralmente tem como função o *hedge* (cobertura de risco de operações comerciais e/ou financeiras), a especulação (“aposta” na variação do preço de ativos ou títulos, com a intenção de auferir ganhos), a arbitragem (ganho pela diferença instantânea de preços entre produtos e/ou mercados) e a estruturação de operações financeiras para a aplicação ou captação de recursosⁱ (HULL, 1996).

Os contratos futuros podem ser negociados dentro ou fora das bolsas de valores. Neste último caso, são denominados de contratos a termo e negociados nos mercados de balcão, diretamente entre as partes contratadas. Caracterizam-se por ser um acordo no qual uma das partes se compromete a vender um determinado ativo por um determinado preço numa data futura estabelecida, e a contraparte se compromete a adquirir este mesmo ativo pelo preço contratado, na data prevista pelo

contrato. Os contratos futuros estabelecem direitos e deveres entre as partes, mas não assumem valor algum quando da sua celebração. Seu valor é estabelecido ao longo do tempo, conforme varie a cotação do ativo subjacente ao contrato no mercado à vista.

O contrato de opção, similarmente ao contrato futuro, caracteriza-se por ser um acordo entre duas partes para a compra e venda de um determinado ativo num determinado preço numa data futura estabelecida. Diferentemente dos contratos futuros, entretanto, o contrato de opção dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de exercê-lo (ARDITTI, 1996). Existem dois tipos de opções: as opções de compra (*calls*) e as opções de venda (*puts*). As opções de compra dão ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de adquirir um ativo a um determinado preço na data contratada. As opções de venda dão ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de vender o ativo no preço contratado na data estabelecida. O vendedor do contrato de opção sempre terá a obrigação de cumprí-lo caso o comprador exerça o seu direito.

Se a opção puder ser exercida pelo comprador antes da data de vencimento do contrato, ela é chamada de opção americana. Ao contrário, se a opção somente puder ser exercida pelo seu detentor na sua data de vencimento, é conhecida como opção européia (ARDITTI, 1996).

A “assimetria” entre direitos e deveres das partes envolvidas num contrato de opção faz com que o mesmo tenha, desde a sua celebração, um valor. Este valor é conhecido como o prêmio pago pelo comprador pelo fato de o vendedor do contrato assumir o risco de posições futuras em relação ao preço do ativo contratado.

O problema central para a comercialização de um contrato de opção é, portanto, a determinação de seu prêmio, ou seja, seu preço. A todo momento os agentes do mercado financeiro procuram estabelecer se o preço de um contrato de opção é “justo”, para a tomada de decisão de comprá-lo ou vendê-lo (no caso de uma opção americana) ou para efeito de celebração de novos contratos (no caso de uma opção européia).

Diversos modelos matemáticos têm sido desenvolvidos com o objetivo de calcular o prêmio a ser pago em um contrato de opção. Um destes modelos foi desenvolvido por BLACK & SCHOLES (1973) e tem grande aceitação no mercado financeiro de opções devido a sua simplicidade de cálculo, e também por ser independente do nível de risco do investidorⁱⁱ. A simplicidade deste modelo está associada ao fato de o preço da opção ser obtido diretamente através de uma fórmula, a partir de dados de entrada observáveis. Estes dados compreendem o preço do ativo subjacenteⁱⁱⁱ, o preço de exercício da opção, o prazo até o vencimento do contrato e a volatilidade do ativo

subjacente. Com exceção da volatilidade, os demais dados necessários ao emprego da fórmula de Black & Scholes (B&S) são observáveis. A volatilidade é o único parâmetro de entrada que deve ser estimado.

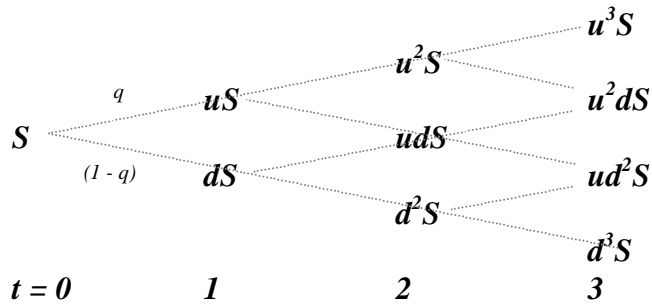
Muitas pesquisas têm sido desenvolvidas no sentido de detectar os desvios dos valores de opções estabelecidos no mercado de capitais em relação aos valores que seriam obtidos a partir do modelo de B&S. Dentre os estudos mais recentes, estão os de DUQUE e PAXON (1994), GEMILL (1996) e VIANA (1998). Estes desvios indicam que o mercado sistematicamente desconsidera o valor teórico das opções, ou então, que os pressupostos utilizados no desenvolvimento do modelo de B&S não estejam corretos.

No Brasil existem poucas pesquisas científicas que procuram explicitar os desvios empíricos em relação aos modelos teóricos de precificação de opções no contexto do mercado de capitais brasileiro. Um destes desvios, o efeito “sorriso”^{iv}, cujo conceito é explicado ao longo do artigo, será tema de uma dissertação no curso de Mestrado em Administração da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais.

2 – OS MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979), baseados numa idéia desenvolvida por Sharpe^v, desenvolveram um processo estocástico^{vi} multiplicativo binomial para o cálculo do prêmio de um contrato de opção (ARDITTI, 1996).

Este modelo considera que, se o preço do ativo subjacente hoje ($t = 0$) é S , a probabilidade de que o seu preço suba e forneça uma taxa de retorno r_u é q , e a probabilidade de que o seu preço caia e forneça uma taxa de retorno r_d é $(1 - q)$, onde $r_u > r_d$. Existem somente dois resultados possíveis a partir de $t = 0$, e a probabilidade de ocorrência de qualquer outro resultado é nula. Assumindo $u = 1 + r_u$ e $d = 1 + r_d$, no instante $t = 1$, o preço do ativo subjacente (S) passaria a ter o valor uS ou dS . Assim, sucessivamente, cada período subsequente equivale ao período anterior multiplicado por u e d , cujas probabilidades de ocorrência são q e $1 - q$, respectivamente, conforme demonstrado na árvore binomial mostrada a seguir (para 03 períodos).



Onde:

S = preço do ativo subjacente

q = probabilidade de ocorrência do retorno u

$1 - q$ = probabilidade de ocorrência do retorno d

$u = 1 + r_u$, retorno com a subida de S

$d = 1 + r_d$, retorno com a descida de S

t = período de tempo

As fórmulas desenvolvidas no modelo binomial partem do pressuposto de que não há possibilidades de arbitragem, ou seja, que o derivativo caminha na árvore binomial ao longo de sua existência.

A teoria do modelo binomial é desenvolvida supondo S como o preço do ativo, e f o valor atual do preço de uma opção sobre esse ativo. Se o preço do ativo S sobe para o nível Su , supõe-se que o retorno da opção sobre o ativo é f_u . Caso o preço do ativo caia para o nível Sd , o retorno da opção é f_d . Considerando uma carteira composta por uma posição comprada de Δ ações e vendida de uma opção, o valor da carteira quando há um movimento de alta é:

$$Su\Delta - f_u$$

No caso de haver uma queda, o valor da carteira passa a ser:

$$Sd\Delta - f_d$$

Para a carteira sem risco, teríamos:

$$Su\Delta - f_u = Sd\Delta - f_d \quad \text{ou} \quad \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \quad (1)$$

Definindo r como a taxa de juros livre de risco e assumindo um regime de capitalização contínua, o valor atual da carteira num período de tempo T seria:

$$(Su\Delta - f_u)e^{-rT}$$

O custo de montagem da carteira é:

$$\begin{aligned}
& S\Delta - f \\
& \therefore \\
& S\Delta - f = (Su\Delta - f_u)e^{-rT}
\end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo o Δ de (1) em (2), e simplificando a equação obtida, temos:

$$f = e^{-rT} [pf_u + (1-p)f_d] \tag{3}$$

onde:

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \tag{4}$$

As equações (3) e (4) permitem o cálculo do preço de uma opção para um único período. Na prática, entretanto, a realidade se mostra mais complexa, com um número de períodos bastante superior. Para casos que envolvem um número grande de períodos, os valores de u e d podem ser determinados através da volatilidade do preço da ação, σ (HULL, 1996). Existem diversas formas de se fazer isso. Uma delas é supor Δt como a extensão de um intervalo de tempo e estabelecendo

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

Nesse caso, teríamos:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Se supusermos o intervalo de tempo (Δt) do modelo binomial tendendo para zero, a equação de cálculo do preço de opções converge para o modelo de B&S (ARDITTI, 1996).

Black & Scholes (1973) demonstraram que é possível montar uma estratégia de cobertura de risco contínua, através da compra de ações e da compra de opções de compra européias das mesmas ações, retornando ao investidor a taxa de juros livre de risco. Tal estratégia é possível se forem atendidas as seguintes condições:

- a) taxa de juros de curto prazo definida e constante;
- b) o preço da ação segue uma distribuição de probabilidades log-normal com variância constante;
- c) a ação não paga dividendos até o vencimento da opção;
- d) não existem custos de transação;
- e) é possível obter empréstimos e emprestar qualquer fração do preço da ação à taxa de juros de curto prazo;

f) não há restrições para a venda "a descoberto"^{vii};

A fórmula para precificação de opções desenvolvida por B&S tem o seguinte aspecto:

$$c = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (5)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (6)$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (7)$$

Para as equações acima, temos:

c = prêmio da opção

S = preço do ativo subjacente à opção

X = preço de exercício

$T-t$ = prazo até o vencimento

r = taxa de juros sem risco

$N(x)$ = probabilidade normal de ocorrência de x , onde x é a proporção da área total sobre a curva normal.

σ = volatilidade do ativo subjacente

De todas as variáveis independentes listadas acima, a volatilidade é a única que deve ser estimada, os demais valores são observáveis. A estimação dos valores de volatilidade do ativo subjacente pode se basear nos valores históricos do preço do ativo subjacente, ou em uma estimativa da volatilidade

futura a partir dos valores que o mercado, utilizando o modelo de precificação de opções de B&S no momento do cálculo do valor da opção, associa ao ativo subjacente, ou seja, sua volatilidade implícita (VIANA, 1998).

A volatilidade implícita de determinado ativo é calculada igualando-se a equação de B&S ao preço de mercado da opção, e resolvendo a equação em termos da volatilidade. Desta forma, a volatilidade implícita pode ser entendida como uma avaliação do mercado, no momento em que o preço da opção é calculado, para o parâmetro da volatilidade constante do modelo de B&S.

Alguns estudos foram desenvolvidos no sentido de estabelecer se as previsões de volatilidade futura de um determinado ativo seriam mais precisas se baseadas em cálculos que considerassem a volatilidade histórica ou na volatilidade implícita deste mesmo ativo. ARMADA E SANTOS (1998) estudaram opções sobre o índice FTSE-100 da Bolsa de Valores de Londres e concluíram que:

“(...) a volatilidade implícita de opções dentro do dinheiro^{viii} parece ser um melhor previsor da volatilidade futura em relação a outras estimativas. Ademais, a volatilidade histórica, independente da metodologia aplicada, denota uma capacidade de previsão muito fraca, o que está de acordo com a teoria assim como com a intuição, uma vez que é de senso comum que os movimentos de preço futuros raramente são explicados por eventos passados.” (Tradução do autor).

Portanto, a volatilidade implícita parece ser um melhor parâmetro para previsão de volatilidades futuras. Este fato justifica o desenvolvimento de pesquisas que procurem identificar o padrão de volatilidade implícita existente no mercado de capitais.

3 – DESVIOS EM RELAÇÃO AO MODELO DE BLACK & SCHOLES: O EFEITO “SORRISO” DA VOLATILIDADE IMPLÍCITA

Quando se calcula a volatilidade implícita para uma série de opções de um mesmo ativo subjacente a partir do modelo de B&S, verifica-se que há diferenças entre os valores de volatilidade encontrados em função do preço de exercício da opção. Em outras palavras, diferentemente do que pressupõe o modelo de B&S, a prática demonstra que para efeito de precificação de opções, um determinado

ativo subjacente não está associado a um único valor de volatilidade implícita, mas a valores que dependem do preço de exercício da opção.

Os diferentes valores de volatilidade implícita de um determinado ativo em uma mesma série de opções^{ix}, quando representadas em um gráfico tendo como abscissa o preço de exercício, e na ordenada o valor de volatilidade implícita, geram uma curva em forma de U, conhecida na literatura de finanças como efeito “sorriso”. A figura abaixo ilustra um exemplo hipotético de efeito “sorriso”.

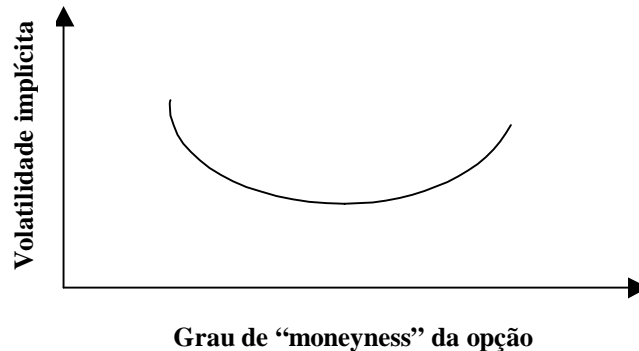


Figura 01: Exemplo hipotético do efeito “sorriso” de uma opção.

Os primeiros estudos empíricos a detectarem o efeito “sorriso” foram desenvolvidos pelos próprios BLACK & SCHOLES (1972). Eles estudaram opções sobre ações da *New York Stock Exchange* (NYSE), no período de 1966 a 1969, concluindo que o modelo de B&S produz valores que se desviam significativamente dos preços de mercado (VIANA, 1998).

Ainda segundo Viana, as conclusões mais importante sobre desvios da prática em relação ao modelo de B&S são as seguintes:

- Os preços obtidos pelo modelo de B&S são, em média, mais baixos do que os preços de mercado para as opções dentro do dinheiro e mais altos para as opções fora do dinheiro.
- O grau de subvalorização (sobrevalorização) de uma opção dentro do dinheiro (fora do dinheiro) aumenta de acordo com a sua distância em relação à série no dinheiro, e diminui à medida que o vencimento da opção se aproxima.
- Os preços do modelo de B&S das opções fora do dinheiro com menos de 90 dias até o vencimento do contrato são, em média, superiores aos preços de mercado.

Portanto, sistematicamente são observados desvios entre os preços praticados pelo mercado e aqueles que seriam obtidos diretamente da aplicação do modelo de B&S.

Foram realizadas pesquisas no sentido de observar o padrão do efeito sorriso em função do tempo, volatilidade, ou preço de exercício da opção. TAYLOR e XU (1994) (*apud* VIANA, 1998) estudaram opções de compra e venda sobre o marco alemão na *Philadelphia Stock Exchange* e concluíram que a magnitude do efeito “sorriso” depende da maturidade da opção (ou seja, o prazo para o seu vencimento). Suas conclusões indicam que o efeito “sorriso” se acentua à medida que se aproxima o prazo de vencimento da opção. DUQUE e PAXSON (1994) analisaram opções na Bolsa de futuros e opções de Londres e também concluíram que o efeito “sorriso” aumenta sua magnitude à medida que a opção se aproxima do seu prazo de vencimento. VIANA (1998) analisou o efeito “sorriso” de opções sobre ações da *LIFFE (London International Financial Futures and Options Exchange)* a partir da base de dados de DUQUE (1994), utilizando um método de convergência linear para o cálculo da volatilidade implícita. Sua pesquisa detectou a existência de um “sorriso” de volatilidade sobre as opções de ações da LIFFE. Além disso, Viana concluiu que a magnitude deste efeito se acentua à medida que se aproxima o vencimento da opção, indicando que há uma confirmação de que o efeito sorriso se acentua em situações de maior volatilidade. A falha do modelo de B&S que vem sendo constatada está relacionada ao fato da volatilidade dos ativos ter sido considerada constante. Conforme os próprios autores do modelo reconheceram, “*se a volatilidade do ativo muda ao longo do tempo, as fórmulas de opções que consideram a volatilidade constante estão erradas*” (BLACK, 1976 *apud* DUMAS et al, 1998).

Existe, também, um outro padrão de curva do efeito “sorriso” conhecido como “sneer”^x, representado na figura 02 abaixo.

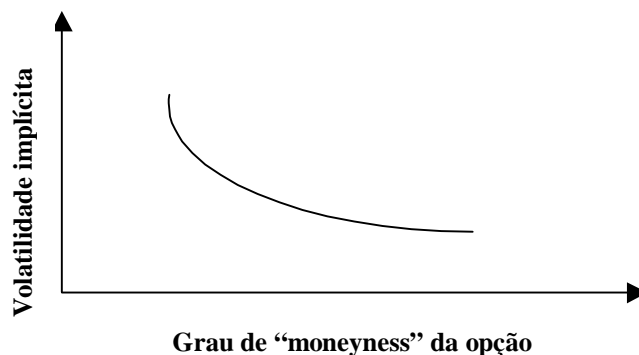


Figura 02: Exemplo hipotético do padrão “sneer” do efeito “sorriso” de uma opção.

Como observa DUMAS et al (1998), a existência do “sneer” pode estar associada ao fato de que o preço do ativo subjacente no vencimento da opção, diferentemente do que pressupõe o modelo de B&S, não assume uma distribuição log-normal. A não log-normalidade dos preços é consistente com

o que tem sido conhecido como o “efeito Fisher Black”. Essa característica de comportamento da volatilidade implícita está associada à variação da volatilidade implícita das opções em função da variação dos preços do ativo subjacente. DUMAS et al (1998:2064) exibem um gráfico de séries temporais relacionando a volatilidade implícita de uma opção sobre o índice S&P 500 e o valor do referido índice, indicando que há uma correlação negativa de $-0,53$ entre as duas grandezas.

Alguns modelos de precificação de opções foram desenvolvidos no sentido de incorporar os desvios observados em relação aos pressupostos de B&S. Tais modelos incluem o estabelecimento de modelos estocásticos para a volatilidade, representados por funções probabilísticas determinísticas associadas ao preço dos ativos e ao tempo de expiração da opção. Estes modelos permitem uma análise mais elaborada, mas preservam alguns dos pressupostos do modelo de B&S, como, por exemplo, a independência em relação ao risco do investidor para a sua aplicação prática.^{xi}

4 – EVIDÊNCIAS EMPÍRICAS DO EFEITO “SORRISO” DA VOLATILIDADE IMPLÍCITA NAS OPÇÕES COMERCIALIZADAS NO BRASIL

Alguns estudos desenvolvidos no Brasil detectaram desvios dos dados empíricos de precificação de opções em relação ao modelo de B&S, como BARRETO e BAIDYA (1987) e DUARTE JR., HEIL e PINHEIRO (1995). Estes estudos, porém, não apresentam resultados representativos no contexto do mercado de opções brasileiro, seja devido ao fato de não estudarem o mercado de maior movimentação financeira atualmente no Brasil, seja devido ao fato de analisarem uma amostra de dados restrita^{xii}.

As pesquisas desenvolvidas por DUQUE e PAXON (1994), VIANA (1998), TAYLOR e XU (1994) evidenciam o efeito "sorriso" em diversos países. Pode-se inferir, a partir destas pesquisas, que o efeito "sorriso" também se verifica no contexto do mercado brasileiro de maior movimentação deste tipo de ativo financeiro, a Bolsa de Valores do Estado de São Paulo - BOVESPA.

Além disso, podemos supor que, uma vez que uma maior volatilidade do mercado está associada a uma maior magnitude do efeito “sorriso”, o mesmo assume grande magnitude no contexto do mercado de capitais brasileiro. Tais hipóteses apresentam-se como importantes para a verificação empírica no contexto brasileiro. Este é um dos objetivos de uma pesquisa em andamento no NUFI/CEPEAD/UFMG.

5 – CONCLUSÃO

Têm-se observado, sistematicamente, desvios entre a precificação de opções realizada em mercados de capitais de diversos países, e aquela que seria obtida diretamente a partir do modelo de B&S. Tais desvios estão relacionados ao fato de que:

- A volatilidade do ativo subjacente não é constante
- A distribuição probabilística dos preços dos ativos subjacentes no vencimento dos contratos não é log-normal.

Tais evidências indicam que algum dos pressupostos do modelo de B&S podem não estar corretos, ou então, que o mercado sistematicamente desconsidera os modelos teóricos de precificação de opções.

O chamado efeito “sorriso” relaciona a variação da volatilidade implícita dos ativos em função do preço de exercício da opção. Sua magnitude varia de acordo com a volatilidade do mercado, cotação do preço do ativo no mercado, e também de acordo com o prazo para expiração da opção. Foram desenvolvidos modelos matemáticos determinísticos que procuram introduzir a variação da volatilidade implícita no modelo de precificação de opções.

No contexto brasileiro, percebe-se uma ausência de pesquisas científicas com o objetivo de caracterizar o efeito "sorriso". Está sendo realizada uma pesquisa no NUFI/CEPEAD/UFMG com este objetivo.

6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ARDITTI, F. D. *Derivatives: A Comprehensive Resource for Options, Futures, Interest Rate Swaps, and Mortgage Securities*, Harvard Business School Press, Boston: 1996.

ARMADA, M. J. da R., SANTOS, C. M., “*Studies on the Volatility of the FSE-100 Index Options*”, Revista de Mercados e Activos Financeiros, v. 1, n. 1, Maio 1998.

BARRETO, L. A. de B., BAIDYA, Tara K. N., “*Teste Empírico do Modelo de Black e Scholes na Avaliação de Opções da Vale do Rio Doce*”, Revista Brasileira do Mercado de Capitais, v. 13, n. 39, pp. 89 - 108, Rio de Janeiro, 1987.

- BLACK, F., SCHOLÉS, M., “*The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency*”, *Journal of Finance*, v. 27, pp. 399 - 417, 1972.
- BLACK, F., SCHOLÉS, M. “*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*” - *Journal of Political Economy*, v. 81, n. 3, pp. 637 - 659, *May/June*, 1973.
- BLACK, F., *Studies of stock price volatility changes, Proceedings of the 1976 Meeting of the American Statistical Association, Business and Economic Statistic Section*, 177 – 181 (apud DUMAS et al).
- COX, J. C. , ROSS, S. A. , RUBINSTEIN, M. “*Options Pricing: A Simplified Approach*”, *Journal of Financial Economics*, n. 7, pp. 229 - 263, 1979.
- DUARTE JR., A. M., HEIL, T. B. B., PINHEIRO, M. de A., “*Previsão da Volatilidade de Ativos e Índices Brasileiros*” - *Resenha BM&F*, n. 112, pp. 15 - 27, 1995: São Paulo.
- DUMAS, B., FLEMING, J., WHALEY, R. E., “*Implied Volatility Functions: Empirical Tests*”, *The Journal of Finance*, v. LIII, n. 6, dezembro/1998, pp. 2059 – 2106.
- DUQUE, J. , PAXSON, D. “*Implied Volatility and Dynamic Hedging*”, *The Review of Future Markets*, v. 13, n. 2, pp. 381 - 421, 1994.
- DUQUE, J. “*The Meaning of Implied Volatility in Pricing Stock Options Traded in Options Markets*”, Tese de Doutorado, Universidade de Manchester, 1994.
- FIABV - *Anuario Estadístico de la Federación Iberoamericana de Bolsas de Valores, Federación Iberoamericana de Bolsas de Valores*, Buenos Aires, Argentina, 1998.
- GÉCZY, C., MINTON, B. A., SCHRAND, C. “*Why Firms Use Currency Derivatives*”, *The Journal of Finance*, v. LII, n. 4, setembro/1997, pp. 1323 – 1354.
- GEMMILL, G., “*Did Option Traders Anticipate the Crash? Evidence from Volatility Smiles in the U. K. with U. S. Comparisons*”, *The Journal of Future Markets*, v. 16, n. 8, pp. 881 - 897, 1996.
- HULL, J., *Introdução aos Mercados Futuros e de Opções*, 2ª. Edição, BM&F e Cultura Editores Associados, São Paulo: 1996.
- HULL, J. *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice-Hall, New York: 1997.
- SHARPE, W. F., ALEXANDER, G. J., BAILEY, J. F., *Investments, Fifth Edition*, Prentice-Hall Inc., USA, 1995
- TAYLOR, S., XU, X. “*The Magnitude of Implied Volatility Smiles: Theory and Empirical Evidence for Exchange Rates*”, *The Review of Future Markets*, v. 13, n. 2, pp. 355-380, 1994 (apud VIANA, 1998)
- VIANA, P. A. B. T. L. C., *O Efeito “Sorriso” da Volatilidade Implícita de Opções Financeiras - Estudo Empírico Aplicado a Opções sobre Acções da LIFFE - Dissertação de Mestrado - Faculdade de Economia do Porto - Universidade do Porto, Porto - Portugal: 1998*

-
- ⁱ GÉCZY et al:(1997) analisaram a utilização de derivativos financeiros de moeda por 372 empresas industriais norte-americanas concluindo que, na média, as empresas analisadas utilizavam derivativos de moeda para realizar hedge.
- ⁱⁱ Dependendo da disposição em assumir riscos, os investidores do mercado financeiro podem assumir posições de investimento que envolvam: 1 - grandes riscos de retorno associadas a grande remuneração do capital investido; 2 - indiferença ao risco de retorno; 3 - maior retorno possível para um dado nível de risco associado a determinado ativo. Estes perfis de risco dos investidores são conhecidos como propensão ao risco, indiferença ao risco, e aversão ao risco, respectivamente (SHARPE et al, 1995).

-
- iii Ativo subjacente é o ativo sobre o qual o comprador de uma opção de compra, por exemplo, terá direito a receber caso a opção seja exercida no seu vencimento.
 - iv Do original em inglês, “smile effect”.
 - v Para maiores detalhes, ver SHARPE et al, 1995.
 - vi O termo processo estocástico é utilizado para descrever o comportamento de alguma variável ao longo do tempo de acordo com alguma lei estatística (ARDITTI, 1996).
 - vii A venda "a descoberto" acontece, por exemplo, quando um agente do mercado de capitais vende opções de compra de determinado ativo sem possuí-lo fisicamente.
 - viii Dependendo de seu preço de exercício (ou de seu grau de “moneyness”), a opção pode ser descrita como "no dinheiro", "dentro do dinheiro" ou "fora do dinheiro" (“at the money, in the money” e “out of the money”, respectivamente).
 - ix As opções que compõe uma série são aquelas relacionadas a um mesmo ativo subjacente, cujas variáveis independentes, com exceção do preço de exercício, assumem o mesmo valor.
 - x Uma tradução de “sneer” pode ser “um sorriso sarcástico, de desdém”.
 - xi Alguns resultados de testes de atribuição de funções determinísticas à volatilidade implícita podem ser encontrados DUMAS et al (1998).
 - xii BARREIRO E BAIDYA analisaram o preço de opções na bolsa de valores do estado do Rio de Janeiro, a qual hoje movimenta cerca de 1/10 do movimento financeiro da Bolsa de Valores do Estado de São Paulo, a maior do Brasil (FIABV, 1998). DUARTE JR, HEIL e PINHEIRO analisaram contratos de opções e evidenciaram o efeito “sorriso” considerando apenas um dia de cotação..