APLICAÇÃO DAS CADEIAS DE MARKOV PARA ANALISAR A VARIABILIDADE DO PREÇO DA COMMODITY LEITE

Monica Pasolini (UCS)
monipasolini@hotmail.com
Mateus Muller Franco (UCS)
mmfranco1@ucs.br
LEANDRO LUIS CORSO (UCS)
llcorso@yahoo.com.br

A agropecuária é uma parte do sistema econômico pouco estudado pela Engenharia de Produção no Brasil, por tanto o objetivo do presente estudo realizado no ano de 2015 foi analisar a pecuária leiteira, mais precisamente a variabilidade do prreço da commodity leite durante os anos de 2009 a 2015 no Estado do Rio Grande do Sul. O estado é atualmente o segundo maior produtor de leite no Brasil. A análise foi feita por meio das cadeias de Markov com a construção da matriz de transição. Para construir a matriz de transição foram definidos intervalos da variação do preço do leite. A partir desta definição foram analisadas quantas vezes a variação do preço saiu do estado i para o estado j e após foi construída a matriz com as probabilidades de transição de Markov. A análise de cenários foi feita por meio das equações de estado estável que indica a probabilidade de encontrar a variação do preço num certo estado. Outra análise foi o tempo esperado de recorrência destas probabilidades. O estudo mostrou que o intervalo com maior probabilidade de ocorrer é da variação no intervalo entre 0,01 a 2 % (aumento do preço) e com tempo de recorrência de dois meses.

Palavras-chave: Cadeias de Markov, Preço do Leite, Agronegócio, Engenharia de Produção.

1. Introdução

A agropecuária é uma parte do sistema econômico pouco estudado pela Engenharia de Produção no Brasil. De acordo com Sabbag e Costa (2015), o complexo agroindustrial leiteiro constitui-se em um dos mais importantes do agronegócio brasileiro. Por tanto, o objetivo do presente estudo é analisar a pecuária leiteira, mais precisamente, a variação do preço do leite por meio das cadeias de Markov. Conforme Alves, Zini e Werner (2015), este ramo da agropecuária apresenta altos níveis de tecnologia, produtividade e qualidade em diversas regiões do país. Segundo estes autores a cadeia de suprimentos do leite precisa se adaptar e reduzir incertezas no preço dentro do contexto que está inserida para verificar a viabilidade econômica da produção. O conhecimento da variação do preço desempenha um papel importante na tomada de decisão das atividades agropecuárias, pois o produtor pode optar por não produzir determinada cultura, animal ou seus derivados durante determinados períodos, como também decidir por investir em tal produto.

A maior parte dos agropecuaristas, especialmente pequenos e médios produtores, verificam o preço de venda dos produtos apenas por intermédio de cooperativas agrícolas, da empresa a qual fornece o produto, ou por meios eletrônicos, como canais de televisão e sites na internet que informam as cotações diárias dos produtos. A aplicação das cadeias de Markov pode auxiliar a prever o preço e também investimentos. Sabe-se que a agropecuária familiar tem participação importante na geração de renda no Estado do Rio Grande do Sul, segundo Alves, Zini e Werner (2015), os agricultores familiares são responsáveis por cerca de 85% da produção de leite no estado. Portanto, este trabalho propõe um estudo utilizando a teoria das cadeias de Markov para analisar a variação do preço do leite nos meses decorrentes entre os anos de 2009 a 2015.

Alves, Souza e Ervilha (2015), fizeram um estudo da variação dos preços do leite no estado de Minas Gerais entre os meses de janeiro de 2000 até julho de 2014. O objetivo foi identificar os períodos de sazonalidade que afetam diretamente o preço do leite. Eles concluíram que a série de dados analisados de preço tem sazonalidade identificável, estável e móvel para o período em questão, concluindo que a previsão do preço é de fundamental importância, não somente para os produtores, mas também para os formuladores de políticas agrícolas, laticínios, cooperativa e investidores.

Jayawardena (2015), apresenta em seu estudo que o consumo mundial de leite irá aumentar nas próximas décadas e devido às variações climáticas haverá flutuações nos preços das *commodities*. O autor afirma que a agricultura é importante não só para a segurança alimentar, como também para geração de renda, pois 36% da força de trabalho do mundo estão empregadas no setor de agricultura. Portanto, são necessários políticas e estudos voltados para o agronegócio desde as novas técnicas de aproveitamento de água e solo, quanto ao planejamento de preços e custos dos produtos.

Estas exemplificações são necessárias para a associação com o ambiente em estudo, por tanto, o objetivo principal deste trabalho é conhecer a variabilidade do preço da *commodity* leite durante os anos de 2009 a 2015 no Estado do Rio Grande do Sul. O estado é atualmente o segundo maior produtor de leite no Brasil conforme mostra o documento da Secretaria de Estado da Agricultura e do Abastecimento – SEAB (2014). Outro objetivo é fazer estimativas do preço futuro a partir das probabilidades de transição das cadeias de Markov e avaliar se o investimento no produto é um bom negócio, dessa forma este estudo inova a maneira de analisar o preço do leite no país. Os dados para o estudo foram retirados no site do Agrolink. Este site disponibiliza preços diários das principais culturas, espécies animais e seus derivados, como exemplo, o leite. O site fornece o preço de quinze estados brasileiros, incluindo o Rio Grande do Sul e também informa as cotações históricas mensais dos produtos, no caso do trabalho será analisado o histórico do preço médio por litro do leite.

2. Referencial Bibliográfico

O método de Cadeias de Markov pode ser utilizado para analisar a ocorrência de períodos secos e chuvosos em regiões específicas. Back, et al. (2014), realizaram um estudo para determinar a probabilidade de ocorrência de períodos secos e chuvosos na região de Saudades – SC, utilizando dados diários de precipitação do período de 1955 a 2012 da estação pluviométrica da Agência Nacional de Águas. Outro estudo semelhante foi realizado por Keller Filho, Zullo Junior e Lima (2006), onde se aplicou o método Cadeias de Markov de terceira ordem para verificar se a ocorrência de dias secos e chuvosos é condicionalmente dependente da sequência de dias secos e chuvosos nos três dias anteriores.

Atualmente se encontram aplicações de Cadeias de Markov em diferentes áreas, como, por exemplo, Ching, Ng e Fung (2008), realizaram um estudo aplicando o modelo de Cadeias de

Markov multivariada de ordem superior. O modelo foi aplicado em uma empresa de refrigerantes da cidade de Hong Kong com o objetivo de prever a demanda de vendas e resolver o problema que a empresa estava enfrentando quanto aos estoques. Outro estudo foi feito por Yang et al. (2011), utiliza o método da cadeia de Markov multivariada de primeira ordem para gerar uma série de dados do tempo que envolve radiação solar, ar temperatura de bulbo seco e umidade absoluta com objetivo de avaliar o desempenho de sistemas de energias renováveis em edifícios de Hong Kong.

Dessa maneira, a modelagem da variação dos preços de venda das *commodities* pode ser de maneira geral na forma estocástica, pois é aleatório ao longo do tempo. Segundo Damé, Teixeira e Lorensi (2007), para modelar um processo é necessário utilizar uma estrutura matemática apropriada, onde são agrupados parâmetros relacionados ao processo envolvido, de tal forma que a série resultante simulada represente o processo que está sendo modelado. Conforme Ruhoff, Fantin-Cruz e Collischonn (2010), as cadeias de Markov assumem que o estado futuro do sistema depende apenas do seu estado presente e das possibilidades de transição, sendo independente da trajetória que o levou aquele estado. As probabilidades de transição são usualmente derivadas de amostras relativas a certo instante de tempo.

Para Ruhoff, Fantin-Cruz e Collischonn (2010), este modelo não ignora o passado, ele assume que as informações do passado estão concentradas no estado presente do processo. Por este motivo, as interações são instantâneas, sendo irrelevante o tempo de permanência das variáveis em cada estado. De acordo com Leotti (2007), a principal característica de uma Cadeia de Markov é que, a cada tempo $t \geq 0$, o próximo estado da cadeia, $P^{(t+1)}$, depende do passado somente por meio do estado atual $P^{(t)}$. Isto pode é definido pela Equação (1).

$$P_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_0 = k_{0,} X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} \quad (1)$$

Sobre o processo estocástico, Leotti (2007) afirma que é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t, t \in T\}$. A variável *t* é interpretada como tempo, quando X_t, representa o estado do processo no tempo t de um dado conjunto T que pode ser discreto ou contínuo. A probabilidade de que um processo passe do estado *i* ao estado *j* em '*t*' passos é dado por $P_{ij}^{(t)} = P\{X_t = j \,|X_0 = i\}$, ou seja, são as probabilidades que o processo esteja no estado *j* no

instante t, dado que estava no estado i no instante 0. Moreira (2006) explica-se que esta característica gera uma matriz de transição (*P*) de dimensão *NxN*, chamada de matriz coluna-estocástica, onde o somatório dos elementos de cada linha é igual a um. Na matriz da Equação 2, pode-se considerar como exemplo que p_{12}, indica a probabilidade de o processo estar no estado 1, mas se transferir para o estado 2, ou seja, a matriz *P* dá as probabilidades de se estar em determinado estado para todas as condições ou estados iniciais possíveis (STAUDT, COELHO, GONÇALVES; 2011).

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{N2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}$$
(2)

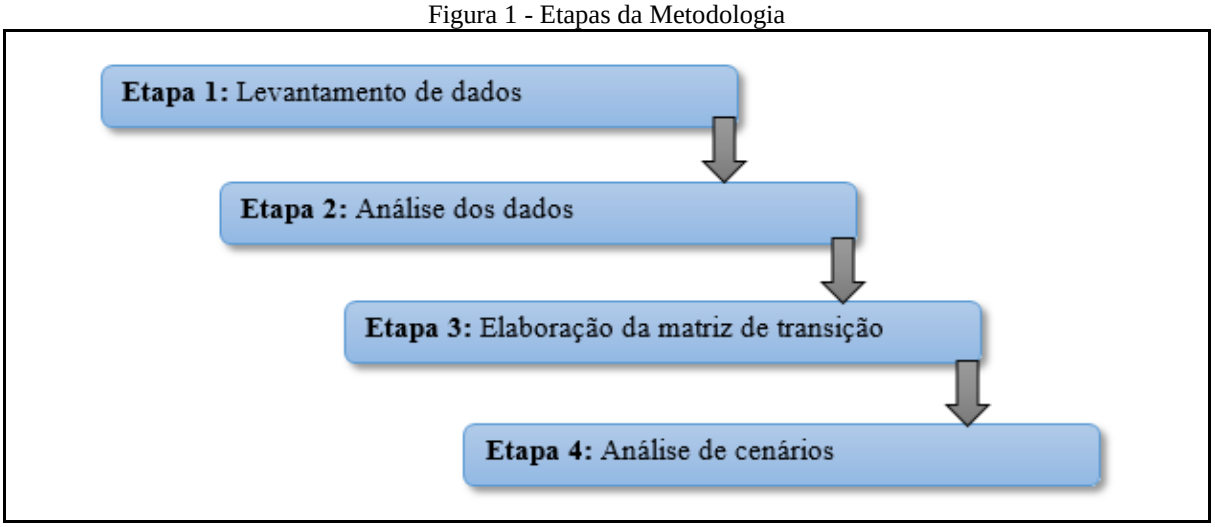
Ruhoff, Fantin-Cruz e Collischonn (2010), afirmam que os estados possíveis de acontecer são representados em matrizes de possibilidades de transição. Essas matrizes de transição representam a possibilidade de um determinado estado *i* permanecer o mesmo ou mudar para o estado *j* durante o instante de tempo $t \geq (t+1)$. Moreira (2006) destaca que o somatório das probabilidades da cadeia se encontrar em *i* ou *j* devem ser iguais, explicado pela equação $\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1$. Staudt, Coelho e Gonçalves (2011), afirmam que para garantir que se chegou nas condições de regime estacionário, a cadeia deve ser ergódica, isso significa que ela descreve matematicamente um processo no qual é possível ir de um estado a outro qualquer. Não há necessidade de fazer em apenas um passo, mas deve ser possível de atingir outros estados sem depender do presente.

Ainda segundo Staudt, Coelho e Gonçalves (2011), a parte mais importante na montagem de uma cadeia de Markov são a definição dos estados do sistema e a contrução da matriz de transição porbabilística. Estes autores explicam que após decorrido um número elevado de períodos de tempo $(t \to \infty)$, a probabilidade do processo estar no estado *j* é constante e independente do estado inicial *i*, ou seja, são as probabilidades estacionárias de absorção.

3. Aplicação e resultados

Nesta sessão é apresentada a metodologia utilizada para o estudo de caso da variação do preço da *commodity* leite por meio das Cadeias de Markov. Para a realização da análise, a metodologia foi dividida nas etapas apresentadas na Figura 1.

Figura 1 - Etapas da Metodologia



3.1 Levantamento de dados

O levantamento dos preços do leite no estado do Rio Grande do Sul nos meses decorrentes entre os anos 2009 a 2015 foram pesquisados no site da Agrolink, este informa as cotações diárias e históricas de produtos da agropecuária.

Os preços analisados são da média do estado, salientando que esta *commodity* é vendida por litro, ou seja, o preço utilizado para o estudo é por litro de leite. No Quadro 1 são mostrados os preços das cotações históricas mensais do leite utilizados para o estudo.

Quadro 1 – Preços do leite

Preço do leite no estado do Rio Grande do Sul																				
Ano	Mês	Preço Médio	Ano	Mês	Preço Médio	Ano	Mês	Preço Médio	Ano	Mês	Preço Médio	Ano	Mês	Preço Médio	Ano	Mês	Preço Médio	Ano	Mês	Preço Médio
2009	1	0,56	2010	1	0,55	2011	1	0,61	2012	1	0,69	2013	1	0,75	2014	1	0,88	2015	1	0,83
	2	0,56		2	0,54		2	0,63		2	0,70		2	0,76		2	0,86		2	0,79
	3	0,56		3	0,56		3	0,64		3	0,70		3	0,75		3	0,86		3	0,78
	4	0,55		4	0,60		4	0,65		4	0,71		4	0,75		4	0,87		4	0,79
	5	0,56		5	0,64		5	0,67		5	0,72		5	0,76		5	0,89		5	0,81
	6	0,59		6	0,64		6	0,68		6	0,72		6	0,79		6	0,89		6	0,83
	7	0,62		7	0,62		7	0,69		7	0,73		7	0,82		7	0,88		7	0,84
	8	0,65		8	0,60		8	0,70		8	0,73		8	0,85		8	0,89		8	0,86
	9	0,63		9	0,59		9	0,69		9	0,74		9	0,88		9	0,89		9	0,87
	10	0,59		10	0,58		10	0,70		10	0,73		10	0,90		10	0,89		10	0,87
	11	0,57		11	0,59		11	0,70		11	0,73		11	0,90		11	0,88		11	0,86
	12	0,54		12	0,60		12	0,69		12	0,74		12	0,89		12	0,85		12	0,00

Fonte: Agrolink (2015)

3.2 Análise dos dados

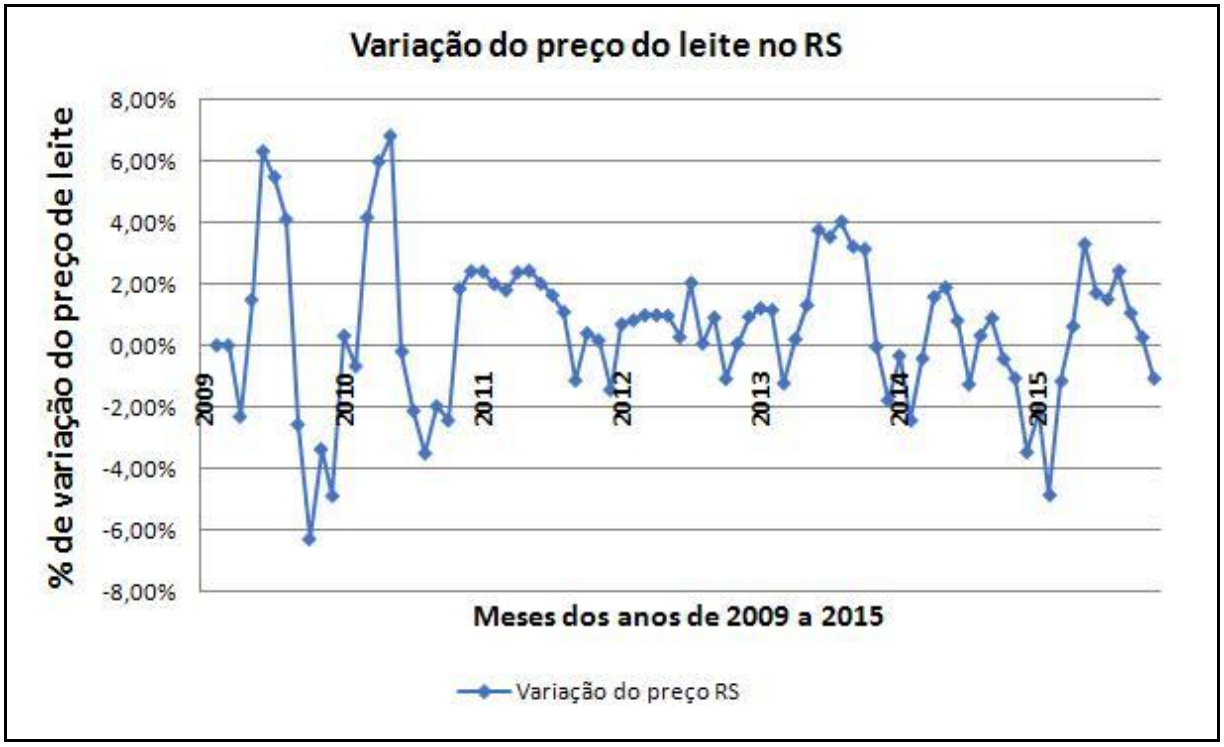
O método escolhido para analisar o preço do leite foi pela sua variação percentual entre os meses. A variação do preço foi calculada pela Equação 3.

$$\%\ variação = \frac{v_{i+1} - v_i}{v_i} \text{ x } 100 \qquad (3)$$

Onde v_i é o preço do mês atual e v_{i+1} é o preço do mês seguinte. Por exemplo: v_i = R$ 0,56 é o preço do mês de março do ano de 2009 e v_{i+1} = R$ 0,55 é o preço do mês de abril desse mesmo ano, o resultando foi de -2,32%, esse valor foi a variação do preço entre esses dois meses e o sinal negativo mostra a queda no preço do leite no mês de abril.

Foram obtidas 83 variações de preços entre os meses dos anos 2009 a 2015. Para mostrar a variação dos preços foi construído o gráfico mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Gráfico da variação do preço do leite



3.3 Matriz de transição

Para construir a matriz de transição foram definidos intervalos da variação do preço. Os intervalos foram divididos conforme Tabela 1. Foram analisadas as frequências de cada intervalo de variação dos preços e seu percentual cumulativo, esses dados são representados pelo histograma mostrado na Figura 3.

A partir desta definição foram analisadas quantas vezes a variação do preço saiu do estado *i* para o estado *j* e após foi construída a matriz com as probrabilidades de transição de Markov. A matriz de transição é mostrada na Figura 4.

Tabela 1- Intervalo de dados

Variação do preço do leite
< -4,00 %
-4,01 a -2,00 %
-2,01 a 0,00 %
0,01 a 2,00 %
2,01 a 4,00 %
4,01 a 6,00 %
> 6,01 %

Figura 3 - Histograma dos intervalos de variação do preço do leite

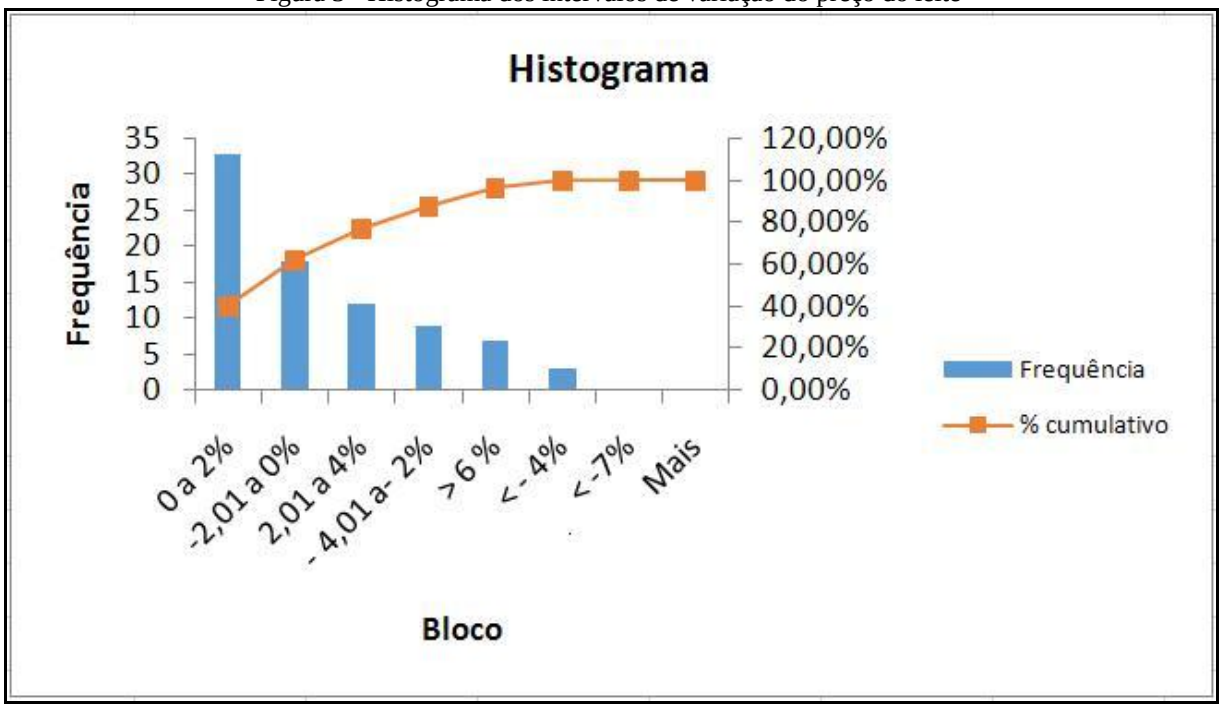


Figura 4 - Matriz de transição

P =

De\ Para	< -4,00	-4,01 a -2,00	-2,01 a -0,00	0,01 a 2,00	2,01 a 4,00	4,01 a 6,00	> 6,01
< -4,00	0,00	0,33	0,33	0,33	0,00	0,00	0,00
-4,01 a -2,00	0,33	0,22	0,22	0,22	0,00	0,00	0,00
-2,01 a 0,00	0,00	0,29	0,24	0,41	0,00	0,06	0,00
0,01 a 2,00	0,00	0,00	0,24	0,56	0,18	0,00	0,03
2,01 a 4,00	0,00	0,00	0,09	0,45	0,36	0,09	0,00
4,01 a 6,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,20	0,40	0,20
> 6,01	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00	0,50	0,00

Por meio do histograma é possível verificar que a concentração da transição é maior na faixa 0 a 2%.

3.4 Análise de cenários

A análise de cenários foi feita por meio das equações de probabilidade de estado estável (4) e (5), dado por π_j que indica a probabilidade de encontrar a variação do preço em estado *j*. A probabilidade de encontrar o processo num certo estado *j*, após um número grande de

transições tende ao valor de π_j. Este valor é independente da distribuição de probabilidade inicial definida para os estados e π = (π_1, π_2, π_3, ... π_n), chama-se de probabilidades de estado estável da Cadeia de Markov (vetor fixo ou ponto fixo) e são iguais ao inverso do tempo esperado de recorrência.

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i . P_{ij} \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1 \tag{5}$$

No conjunto de equações dado por (4) uma delas é redundante e deve ser eliminada para a solução do conjunto de equações. Dessa maneira o cálculo do estado estável da variação do preço do leite é determinado pela Equação (6) e (7).

$$(\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5\ \pi_6) = (\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5\ \pi_6) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}33 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}33 & 0{,}22 & 0{,}22 & 0{,}22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}29 & 0{,}24 & 0{,}41 & 0 & 0{,}06 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}24 & 0{,}56 & 0{,}18 & 0 & 0{,}03 \\ 0 & 0 & 0{,}09 & 0{,}45 & 0{,}36 & 0{,}09 & 0 \\ 0 & 0{,}20 & 0 & 0 & 0{,}20 & 0{,}40 & 0{,}20 \\ 0 & 0 & 0{,}50 & 0 & 0 & 0{,}50 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$(\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5\ \pi_6) = 1 \tag{7}$$

A multiplicação resulta no seguinte sistema de equações:

$$\pi_0 = 0\pi_0 + 0{,}33\pi_1 + 0\pi_2 + 0\pi_3 + 0\pi_4 + 0\pi_5 + 0\pi_6 \tag{8}$$

$$\pi_1 = \tag{9}$$

$$\pi_2 = 0{,}33\pi_0 + 0{,}22\pi_1 + 0{,}24\pi_2 + 0{,}24\pi_3 + 0{,}09\pi_4 + 0\pi_5 + 0{,}5\pi_6 \tag{10}$$

$$\pi_3 = 0{,}33\pi_0 + 0{,}22\pi_1 + 0{,}41\pi_2 + 0{,}56\pi_3 + 0{,}45\pi_4 + 0\pi_5 + 0\pi_6 \tag{11}$$

$$\pi_4 = 0\pi_0 + 0\pi_1 + 0\pi_2 + 0{,}18\pi_3 + 0{,}36\pi_4 + 0{,}20\pi_5 + 0\pi_6 \tag{12}$$

$$\pi_5 = 0\pi_0 + 0\pi_1 + 0{,}06\pi_2 + 0\pi_3 + 0{,}09\pi_4 + 0{,}40\pi_5 + 0{,}50\pi_6 \tag{13}$$

$$\pi_6 = 0\pi_0 + 0\pi_1 + 0\pi_2 + 0{,}03\pi_3 + 0\pi_4 + 0{,}20\pi_5 + 0\pi_6 \tag{14}$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \tag{15}$$

É necessário eliminar uma das equações entre (8) a (15), e resolvendo o sistema de equações obten-se:

$\pi_0 = 0{,}0370$ $\pi_1 = 0{,}1111$ $\pi_2 = 0{,}2099$ $\pi_3 = 0{,}4198$

$\pi_4 = 0{,}1358$ $\pi_5 = 0{,}0617$ $\pi_6 = 0{,}0247$

Estes valores mostram a probabilidade de se encontrar nos determinados estado após muitos meses, a Tabela 2 resume os resultados.

Tabela 2 - Probabilidade de estado estável

Intervalo	Probabilidade
< -4,00 %	3,70 %
-4,01 a -2,00 %	11,11 %
-2,01 a 0,00 %	20,99 %
0,01 a 2,00 %	41,98 %
2,01 a 4,00 %	13,58 %
4,01 a 6,00 %	6,17 %
> 6,01 %	2,47 %

Outra análise foi o tempo esperado de recorrência destas probabilidades, indicado pela variável μ_{jj}. Neste estudo de caso é calculado em quantos meses o preço do leite vai variar em determinado intervalo. Os cálculos são mostrados a seguir:

$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = 27\ meses$ $\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = 9\ meses$ $\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = 5\ meses$

$\mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = 2\ meses$ $\mu_{44} = \frac{1}{\pi_4} = 7\ meses$ $\mu_{55} = \frac{1}{\pi_5} = 16\ meses$

$\mu_{66} = \frac{1}{\pi_6} = 41\ \ meses$

Portanto, pode-se afirmar por meio do tempo de recorência que a maior probabilidade é o preço variar positivamente entre 0,01 a 2,00% de um mês para o outro. O tempo esperado de recorrência para este intervalo é de 2 meses.

Considerações Finais

Os resultados obtidos neste trabalho mostram que é possível aplicar as cadeias de Markov para o estudo de produtos agropecuários. No estudo da variação do preço médio da

commodity leite no estado do Rio Grande do Sul, vendido por litro, a matriz de transição foi construída com base no histórico do preço nos meses decorrentes entre os anos 2009 a 2015. A matriz foi dividia em sete intervalos para facilitar a análise dos dados.

Na análise de cenários, por meio das equações de estado estável foi possível determinar a probabilidade do estado passar de *i* para *j* após um longo período, assim mostrou que o intervalo com maior probabilidade de ocorrer é da variação no intervalo entre 0,01 a 2 % (aumento do preço) e com tempo de recorrência de dois meses. A segunda maior probabilidade de ocorrer foi do intervalo entre -2 a 0% (queda de preço) com o tempo de recorrência de cinco meses. Isso mostra que a maior variação do preço do leite, entre meses, no Rio Grande do Sul será entre -2% a 2%.

Por fim, é possível afirmar que a Engenharia de Produção pode atuar também no agronegócio, podendo aplicar modelos matemáticos de Pesquisa Operacional que avaliem os preços dos produtos de forma análitica.

REFERÊNCIAS

ALVES F. F.; SOUZA, L. V. C.; ERVILHA, G. T. Planejamento e previsão do preço do leite em Minas Gerais: análise empírica com base no modelo X12- ARIMA. **Revista de Economia e Agronegócio**, v.12, n.1,2 e 3, 2015

ALVES V. T., ZINI D.W., WERNER L. Simulação de Monte Carlo aplicada aos custos da cadeia produtiva do leite. **Revista Eletrônica Gestão & Saúde**, v. 6, n. 2. p. 1057-1074, abr. 2015

AGROLINK. Apresenta dados históricos dos preços dos produtos agrícolas. Disponível em:<http://www.agrolink.com.br/cotacoes/historico/rs/arroz-irrigado-em-casca-sc-50k> Acesso em 14 nov. 2015

BACK, A. J.; GALATTO S. L.; COAN B. P.; DELLA, J. P. **VI-003 – Probabilidade de ocorrência de períodos secos e períodos chuvosos em Saudades – SC.** XII SIBESA 2014.

CHING, W.; NG, M. K.; FUNG, E. S. Highter-order multivariate Markov chains and their applications. **Linear Algebra and its Applications**, 428 (2008) 492-507.

DAMÉ, R. C. F.; TEIXEIRA, C. F. A.; LORENSI, R. P. Simulação de precipitação com duração horária mediante o uso do modelo bartlett-lewis do pulso retangular modificado. **Revista Brasileira Agrociência**, v.13, n.1, p.13-18, jan-mar, 2007.

JAYAWARDENA, A. W. Climate Change – Is it the cause or the effect? **KSCE Journal of Civil Engineering,** (2015) 19(2):359-365.

KELLER FILHO, T.; ZULLO JUNIOR, J.; LIMA, P. R. S. R. Análise da transição entre dias secos e chuvosos por meio da cadeia de Markov de terceira ordem. **Revista Pesquisa Agropecuária brasileira,** v.41, n.9, p.1341-1349, set, 2006.

LEOTTI, V. B.. **Comparação via simulação dos estimadores clássicos e bayesianos no modelo de coeficientes aleatórios.** 2007. 99 p. Dissertação (Mestrado em Epidemiologia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Epidemiologia, Porto Alegre, 2007.

MOREIRA, Rafael Henrique Rodriguês**. Modelos multivariados com Markov Switching aplicados à política monetária brasileira.** 2006. 90 p. Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Economia, São Paulo, 2006.

RUHOFF, A.; FANTIN-CRUZ, I.; COLLISCHONN, W. Modelos de simulação dinâmica do desmatamento na amazônia. **Revista Caminhos de Geografia**, v.11, n. 36, p. 258-268, dez, 2010.

SABBAG, O. J.; COSTA, S. M. A. L. Análise de custos de produção de leite: aplicação do método de Monte Carlo. **Revista Extensão Rural**, v. 22, n.1, jan-mar, 2015.

SECRETARIA DE ESTADO DA AGRICULTURA E DO ABASTECIMENTO. Departamento de Economia Rural. **Análise da conjuntura agropecuária – leite.** Paraná, 2014. Disponível em: <http://www.agricultura.pr.gov.br/arquivos/File/deral/Prognosticos/bovinocultura_leite_14_15.pdf>

STAUDT, F. H.; COELHO, A. S.; GONÇALVES, M. B. Determinação da capacidade real necessária de um processo produtivo utilizando cadeia de Markov. **Revista Produção**, v. 21, n. 4, p. 634-644, out-dez, 2011.

YANG, H.; LI, Y.; LU, L.; QI, R. First order multivariate Markov chain model for generating annual weather data for Hong Kong. **Energy and Buildings** 43 (2011) 2371-2377.