

PESQUISA OPERACIONAL: UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DAS FILAS A UM SISTEMA DE ATENDIMENTO

Rafael de Bruns

Sérgio Pacífico Soncim

Maria Cristina Fogliatti de Sinay - Phd

Instituto Militar de Engenharia – IME, Mestrado em Engenharia de Transportes.
Praça General Tibúrcio, 80. Praia Vermelha – Rio de Janeiro – RJ – CEP. 22.290-270

Abstract

This paper presents the application of the Queue Theory as a tool to evaluate the operation system of department store attendance. The Queue Theory allows to foresee the behavior of a system, facilitating the dimension of installations, equipments and personal.

Key words: *Queue, Research e Operation*

1. Introdução

As filas são uma constante da vida cotidiana das pessoas. Elas são enfrentadas com bom ou mau humor, ou até com indiferença. O certo é que, no dia-a-dia, as filas constituem algo desagradável, mas que deve ser encarado da melhor maneira possível. Já o analista de sistemas de gerência, enfrenta problemas em que as filas surgem com implicações econômicas sérias, exigindo um tratamento racional do fenômeno.

A Teoria das Filas é um setor da Pesquisa Operacional que utiliza conceitos básicos de processos estocásticos e de matemática aplicada para analisar o fenômeno de formação de filas e suas características. Foi desenvolvida com a finalidade de prever o comportamento das filas de modo a permitir o dimensionamento adequado de instalações, equipamentos e sua infra-estrutura.

É necessário deixar claro de início que os modelos nem sempre conseguem representar as situações reais com grande precisão. Muitas vezes, as premissas necessárias ao desenvolvimento matemático dos modelos envolvem simplificações substanciais. Mesmo assim, há vantagem em desenvolver tais modelos, principalmente por que eles levam a um melhor entendimento das principais condicionantes do processo.

Uma fila é caracterizada por um processo de chegadas (pessoas, veículos, trens, etc.) a um sistema de atendimento formado por uma ou mais unidades de serviço. As unidades podem ser atendidas individualmente (pedágio, porto, etc.), ou em grupos (pessoas num elevador, veículos num semáforo, etc.).

No caso em estudo deste trabalho, a coordenação da operação de atendimento é realizada pela própria gerência da empresa.

Dentro do contexto apresentado, o presente trabalho tem como objetivo avaliar os parâmetros de efetividade do Sistema de Filas que se formam no acesso aos caixas de uma Loja de Departamentos, utilizando-se do método da Teoria das Filas.

Pretende-se, ao final desta avaliação, por meio da análise dos parâmetros calculados, confrontar os resultados obtidos para a situação vigente, descrita no estudo de caso, com as hipóteses formuladas que sejam viáveis de serem implantadas.

2. Descrição do Sistema

A Loja de Departamentos em questão, situada em um estabelecimento comercial de grande circulação de pessoas, possui 26 postos de atendimento (denominados Caixas).

Cada caixa tem a função de fazer a cobrança das compras efetuadas por clientes, possuindo um sistema informatizado de atendimento.

O pagamento destas compras é efetuado com dinheiro, cheque ou cartão de crédito, sendo que este último requer mais tempo de atendimento, pois necessita de consulta na operadora do mesmo. Os clientes chegam para aguardar em uma fila única e são atendidos de acordo com a ordem de chegada.

3. Modelagem Analítica do Sistema

Para definir o modelo de filas é necessário coletar e analisar os dados referentes às chegadas dos clientes aos caixas, o número dos mesmos dispostos em paralelo e os tempos despendidos para o serviço, assim como o tipo de fila que se forma, que no caso estudado, a fila é única com atendimento seguindo a ordem de chegada dos clientes. Por se tratar de um trabalho que tem como objetivo apresentar as técnicas da teoria de Filas, apenas uma amostra foi coletada.

3.1. Chegada dos Clientes

A coleta de dados, dos tempos de chegada, foi realizada de tal maneira que foram observados os tempos consecutivos de chegadas de clientes à fila.

Para a determinação do tipo de distribuição que se enquadram as chegadas dos clientes consideraram-se intervalos de 1 minuto, obtendo-se a freqüência observada para cada minuto considerado no estudo. Os dados referentes ao número de clientes que chegam aos Postos de Atendimento são representados na tabela 3.1.

Nº de chegadas em 1 Minuto	Freq. Observada (Oi)	Freq. Rel. Observ.	Freq. Observ Ac
0	5	0,07	0,07
1	9	0,13	0,20
2	11	0,16	0,36
3	18	0,26	0,61
4	14	0,20	0,81
5	8	0,11	0,93
6	5	0,07	1,00
Total	70	1,00	

Tabela 3.1 – Freqüências Observadas no processo de chegadas.

Em primeira análise, pode-se perceber a não existência de sazonalidade, assim como uma tendência da curva da frequência relativa observada (gráfico 3.1) a se conformar como uma Distribuição de *Poisson* com taxa média (λ) de 3,014 clientes por minuto.

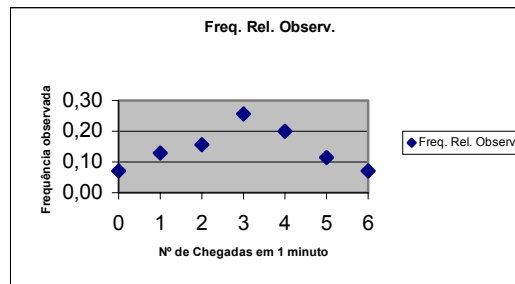


Gráfico 3.1 – Gráfico das Frequências Relativas Observadas do Processo de Chegada.

A partir dos dados da tabela 3.1, partiu-se para o cálculo da frequência calculada para a realização dos testes de Aderência Gráfica e do Chi-quadrado, ou seja, testar se a variável em questão, número de chegadas por unidade de tempo, segue uma distribuição de *Poisson* com taxa 3,014 clientes por minuto, ao 5% de significância.

Nº de chegadas em 1 Minuto	Freq. Rel. Calc.	Freq. Calc. Ac.	Freq. Calc (Ei)	$(O_i - E_i)^2 / E_i$
0	0,05	0,05	3,44	0,71
1	0,15	0,20	10,36	0,18
2	0,23	0,43	15,61	1,36
3	0,23	0,67	15,68	0,34
4	0,17	0,84	11,82	0,40
5	0,11	0,95	7,12	0,11
6	0,05	1,00	3,58	0,56
Total	1		68	3,67

Tabela 3.2 – Frequências Calculadas no processo de chegadas.

3.2 – Teste de Aderência Gráfica.

Os dados da tabela anterior foram plotados (gráficos 3.2 e 3.3) com a finalidade de se realizar um teste de aderência gráfica para uma distribuição de *Poisson* com parâmetro $\lambda = 3,014$ clientes por minuto.

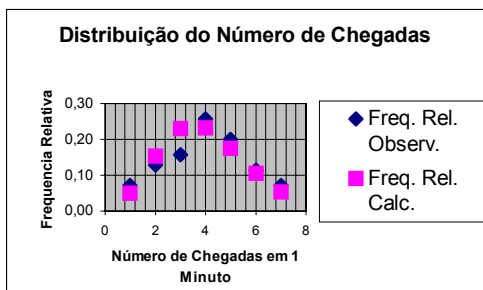


Gráfico 3.2 – Aderência Gráfica

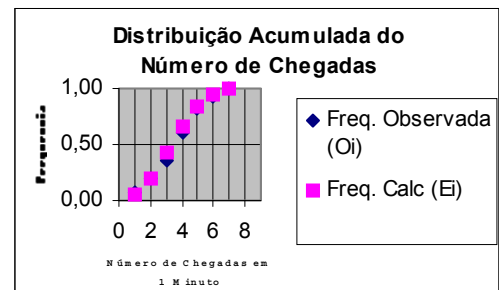


Gráfico 3.3 – Frequência Acumulada.

3.3 - Teste não Paramétrico para Distribuição de Poisson.

A partir dos dados da tabela 3.2, testam-se as seguintes hipóteses para a média de 3,23 clientes por minuto:

H_0 = a variável que representa o número de chegadas por unidade de tempo, segue uma distribuição de Poisson com taxa 3,014 clientes por minuto, ao 5% de significância.

H_1 = a variável que representa o número de chegadas por unidade de tempo, não segue uma distribuição de Poisson com taxa 3,014 clientes por minuto, ao 5% de significância.

Graus de Liberdade: $\nu = k - m - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$, onde k é o número de intervalos e m é o número de variáveis em questão.

Se $\chi^2_{\nu} = \sum_{i=1}^N \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} > \chi^2_{\nu, \alpha}$, então rejeita H_0 ao α % de significância, onde $\chi^2_{\nu, \alpha}$ é um valor tabelado e χ^2_{ν} foi obtido da tabela 3.2. Como $\chi^2_{\nu} = 3,668 < \chi^2_{\nu, \alpha} = 11,071$, então não há indícios para se rejeitar H_0 ao 5% (α) de significância.

3.4 – Atendimento dos Clientes.

A coleta de dados, dos tempos de atendimento, foi realizada de tal maneira que foram anotados os tempos gastos por cada caixa para realizar o seu atendimento.

Para a determinação do tipo de distribuição que se enquadram os tempos de atendimento consideraram-se os tempos de atendimento entre 0 – 6 minutos, obtendo-se a frequência observada para cada intervalo considerado.

Os dados referentes ao número de clientes que foram atendidos por caixas por intervalo de tempo considerado são representados na tabela 3.3. Da mesma forma que o processo de chegadas, com os dados da tabela 3.3 a tabela 3.7, partiu-se para o cálculo da frequência calculada (tabela 3.4) e os testes não paramétricos.

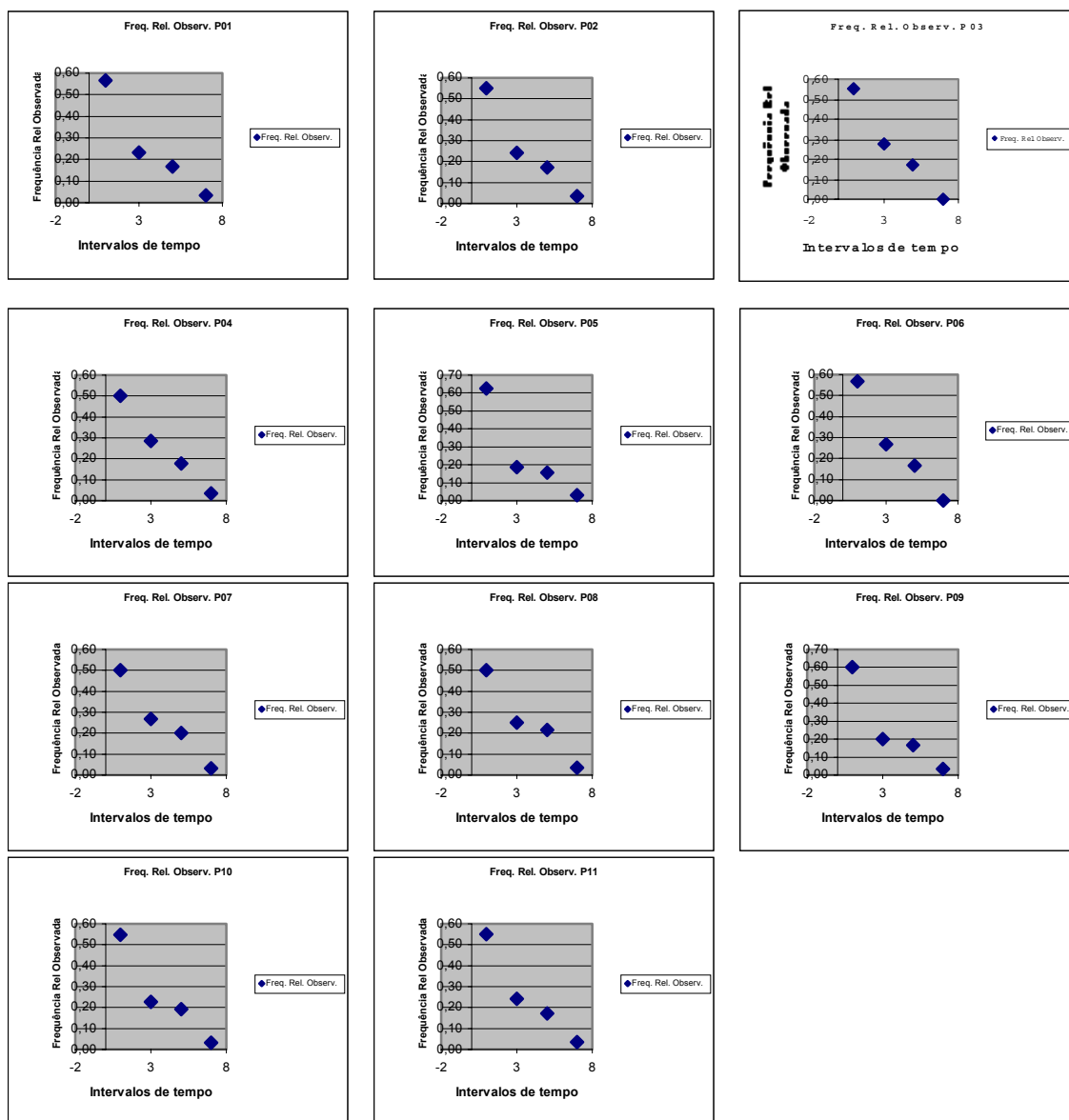
Tempo (minutos)	Freq. Observada (O _i)										
	PO1	PO2	PO3	PO4	PO5	PO6	PO7	PO8	PO9	PO10	PO11
0 - 2	17	16	16	14	20	17	15	14	18	17	16
2 - 4	7	7	8	8	6	8	8	7	6	7	7
4 - 6	5	5	5	5	5	5	6	6	5	6	5
6 - 8	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
Total	30	29	29	28	32	30	30	28	30	31	29
1/ μ	2,33	2,38	2,24	2,50	2,19	2,20	2,53	2,57	2,27	2,42	2,38

Tabela 3.3 – Frequência Observada para Atendimento.

Tempo (minutos)	Freq. Rel. Observ.										
	PO1	PO2	PO3	PO4	PO5	PO6	PO7	PO8	PO9	PO10	PO11
0 - 2	0,57	0,55	0,55	0,50	0,63	0,57	0,50	0,50	0,60	0,55	0,55
2 - 4	0,23	0,24	0,28	0,29	0,19	0,27	0,27	0,25	0,20	0,23	0,24
4 - 6	0,17	0,17	0,17	0,18	0,16	0,17	0,20	0,21	0,17	0,19	0,17
6 - 8	0,03	0,03	0,00	0,04	0,03	0,00	0,03	0,04	0,03	0,03	0,03
Total	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 3.4 – Frequência Relativa Observada para Atendimento.

Em primeira análise, pode – se perceber de uma forma geral, uma tendência da curva da frequência relativa observada a se conformar seguindo uma Distribuição *Exponencial* com taxa média de 0,42 clientes por minuto, (gráficos 3.4 a 3.14).



Gráficos 3.4 ao 3.14 – Frequência Relativa Observada do Processo Atendimento.

Com os dados da tabela 3.4, partiu-se para o cálculo da frequência calculada (tabela 3.5 a 3.7) e a realização do teste Chi-quadrado, ou seja, testar se a variável em questão, o tempo de atendimento, segue uma distribuição *Exponencial* com taxa média 0,42 clientes por minuto, ao 5% de significância.

Tempo (minutos)	Freq. Calc (Ei)										
	PO1	PO2	PO3	PO4	PO5	PO6	PO7	PO8	PO9	PO10	PO11
0 - 2	17,27	17,06	17,71	16,52	17,98	17,91	16,38	16,22	17,59	16,875	17,056
2 - 4	7,33	7,36	7,26	7,42	7,20	7,22	7,44	7,45	7,28	7,383	7,359
4 - 6	3,11	3,18	2,97	3,34	2,89	2,91	3,38	3,42	3,01	3,230	3,175
6 - 8	1,32	1,37	1,22	1,50	1,16	1,17	1,53	1,57	1,25	1,413	1,370
Total	29,03	28,96	29,15	28,78	29,23	29,21	28,72	28,66	29,12	28,901	28,96

Tabela 3.5 – Frequência Calculada para Atendimento.

Tempo (minutos)	Freq. Rel. Calc.										
	PO1	PO2	PO3	PO4	PO5	PO6	PO7	PO8	PO9	PO10	PO11
0 - 2	0,59	0,59	0,61	0,57	0,62	0,61	0,57	0,57	0,60	0,58	0,59
2 - 4	0,25	0,25	0,25	0,26	0,25	0,25	0,26	0,26	0,25	0,26	0,25
4 - 6	0,11	0,11	0,10	0,12	0,10	0,10	0,12	0,12	0,10	0,11	0,11
6 - 8	0,05	0,05	0,04	0,05	0,04	0,04	0,05	0,05	0,04	0,05	0,05
Total	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 3.6 – Freqüência Relativa Calculada para Atendimento.

Tempo (minutos)	$(O_i - E_i)^2 / E_i$										
	PO1	PO2	PO3	PO4	PO5	PO6	PO7	PO8	PO9	PO10	PO11
0 - 2	0,00	0,07	0,16	0,38	0,23	0,05	0,12	0,30	0,01	0,00	0,07
2 - 4	0,01	0,02	0,08	0,04	0,20	0,08	0,04	0,03	0,22	0,02	0,02
4 - 6	1,15	1,05	1,38	0,83	1,55	1,51	2,04	1,94	1,31	2,38	1,05
6 - 8	0,08	0,10	1,22	0,17	0,02	1,17	0,19	0,21	0,05	0,12	0,10
Total	1,25	1,23	2,84	1,43	2,00	2,81	2,38	2,48	1,60	2,52	1,23

Tabela 3.7 – Chi-quadrado Calculado.

3.5 – Testes Não Paramétricos para Distribuição Exponencial.

Serão testadas as hipóteses de que os tempos de atendimentos nos caixas estão idêntica e exponencialmente distribuídos em torno a uma média de 2,36(1/μ) minuto, onde

$$\mu = \frac{1}{11} * \sum_{i=1}^{11} (\mu_{PO,i}).$$

H₀ = a variável que representa o tempo de atendimento segue uma distribuição Exponencial com média igual a 2,36 minutos, ao 5% de significância.

H₁ = a variável que representa o tempo de atendimento não segue uma distribuição Exponencial com média igual a 2,36 minutos, ao 5% de significância.

Se $\chi^2_v = \sum_{i=1}^N \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} > \chi^2_{v, \alpha}$, então rejeita H₀ ao α % de significância;

PO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
χ^2_v	1,25	1,23	2,84	1,43	2,00	2,81	2,39	2,48	1,59	2,52	1,23
$\chi^2_{v, \alpha}$	3,84	3,84	3,84	3,84	3,84	3,84	3,84	3,84	3,84	3,84	3,84

Tabela 3.8 – Tabela Resumo Teste Não Paramétrico.

Como $\chi^2_v < \chi^2_{v, \alpha}$, para todos os posto, então não há indícios para se rejeitar H₀ ao 5% de significância.

4. O Modelo de Filas

O modelo ajustado segundo os dados obtidos é M / M / 11 / ∞ / FIFO (Notação de Kendall), com λ = 3,014 clientes por minuto e μ = 0,42 clientes por minuto. Os parâmetros a serem calculados e que representam a operacionalidade do sistema são:

- L(c) = Número médio de clientes no sistema;
- W(c) = Tempo médio de permanência de um cliente qualquer no sistema;
- Lq(c) = Número médio de clientes na fila aguardando atendimento;
- Wq(c) = Tempo médio de permanência de um cliente qualquer na fila;

- P_0 = Probabilidade de o sistema estar vazio (igual a ociosidade total do sistema);

4.1 – Situação Usual do Sistema.

Utilizando-se as fórmulas descritas abaixo, para a situação atual ($\lambda = 3,014$, $\mu = 0,42$ e $C = 11$), pode-se verificar

Formulas para o sistema M/M/C/ ∞ /FIFO

$$r = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\lambda}{c * \mu}, P_0(c) = \left[\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} \right) + \frac{r^c}{c! * (1 - \rho)} \right]^{-1}, Lq(c) = \frac{P_0(c) r^{c+1}}{(c-1)!(c-r)^2}, L(c) = r + \frac{P_0(c) \rho * r^c}{c! * (1 - \rho)^2},$$

$$Wq(c) = \frac{Lq(c)}{\lambda}, W(c) = Wq(c) + \frac{1}{\mu}$$

que ocorre uma ociosidade (P_0) de 34% do tempo e também um tempo de espera na fila de 0,20 minutos, ou seja, o cliente chega e praticamente se dirige para o caixa, então, podemos concluir que o sistema está superdimensionado, do ponto de vista da gerência. Assim, verificou-se o comportamento do sistema no caso de aumento da demanda, mantendo-se o número de postos de atendimento.

5.2 – Situação para Projeção em Dia de Pico.

Considerando um aumento na demanda para 5.000 clientes no dia de maior movimento, a gerência da Loja sobe a oferta de 11 postos de atendimento para 20 caixas. Abordaremos esta situação, mantendo a taxa de atendimento constante $\mu = 0,42$ clientes por minuto e considerando a nova demanda, equivalente a $\lambda = 7$ clientes por minuto.

Pode-se verificar que ocorre uma ociosidade do sistema de 17% do tempo e também um tempo de espera na fila de 0,542 minutos, o cliente espera um pouco antes de se dirigir para o caixa, mas ainda é um tempo pequeno, que não causa desconforto ao cliente, ou seja, o sistema continua superdimensionado.

5.3 – Variando os Postos de Atendimento de 8 a 11

Neste modelo, variou-se o número de postos de atendimento, para verificar se a redução de postos afetaria substancialmente os tempos de espera do cliente no sistema. Os resultados encontram-se na tabela 4.1 e no gráfico 4.1.

L(c)	W(c)	Lq(c)	Wq(c)
7,92	6,30	11,80	3,92
7,74	3,06	2,04	0,677
7,58	2,60	0,66	0,221
7,43	2,44	0,261	0,086

Tabela 4.1: Variação do número de postos de 8 a 11

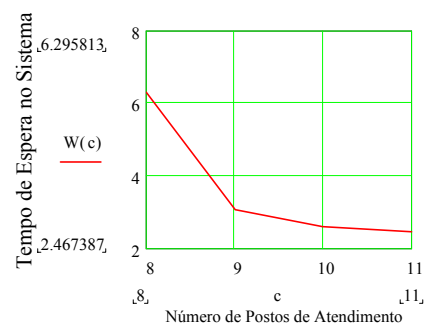


Gráfico 4.1 – Variação do Número de Postos de Atendimento

Pode-se observar que variando de 8 a 11 postos de atendimento, considerando a situação atual do sistema, o ideal do ponto de vista da gerência seria dispor de 9 Caixas, pois o tempo de espera no sistema do cliente é de aproximadamente 3 minutos, o que não causa muito desconforto para o cliente.

Como a demanda varia de horário para horário, achou-se útil verificar o número de postos de atendimento que devem ser mantidos, segundo o λ . Para isto, fixou-se em 6 minutos o valor de $W(c)$ que é o parâmetro que melhor representa os anseios dos clientes. Os resultados obtidos (tabela 4.2) podem ser usados pela gerência do sistema para dispor dos servidores para outras atividades quando a demanda o permitir.

λ (taxa de ingresso)	C(postos de atendimento)
1,89< λ <2,30	6
2,30< λ <2,70	7
2,72< λ <3,14	8
2,72< λ <3,56	9
3,56< λ <3,97	10
3,97< λ <4,40	11
4,40< λ <4,81	12
4,81< λ <5,23	13
5,23< λ <5,64	14

Tabela 4.2: Número de postos de atendimento segundo λ .

5. Conclusões

O uso da Teoria de Filas é uma ferramenta útil para avaliar a operacionalidade de um sistema. O tratamento dos dados e a análise dos resultados permite concluir sobre o comportamento dos 3 componentes do processo: gerência-servidor-usuário, que tem tendências diferentes e devem ser conciliadas em um resultado final.

7 – Bibliografia

1. NOVAES, G.: “Pesquisa Operacional e Transportes: Modelos Probabilísticos”, Ed. McGraw – Hill, São Paulo, 1975.
2. HILLIER, Frederick S. & LIEBERMAN, Gerald J.: “Operations Research”, 2ª Edition, Ed. Holden Day – San Francisco, 1974.
3. STEVENSON, W. J.: “Estatística aplicada à Administração”, Ed. Harbra, São Paulo, 1986.
4. GROSS, Donald & HARRIS Carl, “Fundamentals of Queueing Theory”, Ed. John Willey, New York, 1974.
5. SINAY, M. C., *et alli*: “Qualidade de Produtividade do Sistema de Transporte Metropolitano de Passageiros”, II Congresso Internacional de Transportes Metropolitanos Sobre Trilhos, Rio de Janeiro, 1994.
6. SINAY, M. C., *et alli*: “Planejamento e Controle Operacional de Terminais Ferroviários Urbanos de Topo”, II Congresso Internacional de Transportes Metropolitanos Sobre Trilhos, Rio de Janeiro, 1994.