



# **OTIMIZAÇÃO MULTIPERÍODO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO A TÉCNICA DE GERAÇÃO DE ÁRVORES DE CENÁRIOS**

**Bruno Russi (EPUSP)**

bruno@qifundos.com.br

**Celma de Oliveira Ribeiro (EPUSP)**

celma@usp.br

**Anna Andrea Kajdacsy Balla Sosnoski (EPUSP)**

anna.sosnoski@gmail.com

*Este artigo consiste na elaboração de um modelo de otimização multiperíodo de carteiras de investimento com custos de transação. A escolha da carteira ótima de investimento envolve incertezas, caracterizadas pelos preços dos ativos, que podem ser modeladas segundo processos estocásticos, transformando o problema num problema de otimização estocástica. Entretanto, dado o tamanho e a complexidade desses problemas, utilizam-se algoritmos alternativos na modelagem dessas incertezas, como as técnicas de geração de árvores de cenários. O processo de geração de árvores de cenários transforma o problema estocástico num problema determinístico de grandes dimensões, além de representar de forma clara e concisa a evolução dos possíveis caminhos - cenários - que uma variável aleatória pode assumir. Para resolver o modelo de otimização, utilizou-se uma carteira de investimento composta de ações de empresas brasileiras. Os resultados obtidos com o modelo e as análises de sensibilidade são explicitados e confrontados com os índices benchmark de mercado.*

*Palavras-chaves: Otimização, multiperíodo, árvores de cenários*

## 1. Introdução

O problema da alocação ótima de ativos numa carteira de investimentos – portfólio – vem se tornando um tópico de extremo interesse por acadêmicos e profissionais que atuam na área de finanças nos últimos anos. Baseados no célebre trabalho de Harry Markowitz (1952), os pesquisadores vêm desenvolvendo modelos que buscam aprimorar as técnicas já conhecidas, baseadas em modelos de otimização.

Muitos autores têm estudado o problema da alocação dinâmica de carteiras de investimentos, em que a composição da carteira é revisada e adequada à fronteira eficiente, a cada período, dentro de um horizonte de investimento. Em oposição ao modelo estático criado por Markowitz, os pesquisadores utilizam-se de uma variedade de modelos de otimização multiperíodo, incluindo otimização estocástica, para desenvolver um modelo dinâmico de alocação ótima de ativos. Entretanto, a complexidade destes modelos e o grande esforço computacional que demandam, acabam por desestimular seu uso na prática dos profissionais da área financeira.

Este artigo busca preencher a lacuna existente entre a teoria e a aplicação prática desses modelos multiperíodos de otimização, através da construção de um modelo de otimização simplificado, mas que incorpora a evolução dos preços dos ativos considerados através de técnicas de simulação. No Brasil, as técnicas de alocação ótima de carteiras estão ainda em estágio inicial de uso, sendo, portanto, utilizados apenas os conceitos introduzidos por Markowitz por grande parte dos tomadores de decisão do mercado financeiro brasileiro – bancos, fundos de pensão, companhias de seguro, fundos mútuos, entre outros.

O artigo é desenvolvido da seguinte maneira. Na seção 2 são apresentados os conceitos de Teoria Moderna de Carteiras, Processos Estocásticos e Simulação de Monte Carlo respectivamente que serão adotados no modelo proposto. Em seguida na seção 3 é apresentado o modelo adotado seguido na seção 4 pelos resultados obtidos. A conclusão, na seção 5, encerra o trabalho.

## 2. Fundamentação Teórica

### 2.1. Teoria Moderna de Carteiras

A teoria moderna de carteiras (TMC) foi introduzida em 1952 por Harry Markowitz. Antes de seu trabalho ter sido publicado, os investidores concentravam-se exclusivamente nos riscos e retornos de ativos individuais na construção de suas carteiras de investimento, sem considerar a correlação entre eles (FRANCIS, 1979). Logo, os investidores procuravam aqueles ativos que oferecessem individualmente as melhores oportunidades de rentabilidade com mínimo risco, para então construírem as suas carteiras.

Markowitz, através de seu artigo “Portfolio Selection”, propõe que os investidores selecionem as carteiras, não com base no desempenho individual de ativos, mas levando em consideração o desempenho da carteira de forma agregada.. A diversificação de carteiras pode levar a construção de carteiras “mais eficientes”, devido ao efeito da correlação entre os ativos.

O modelo considera os retornos como variáveis aleatórias e analisa o risco como sendo a variância. A procura por uma carteira de mínima variância recai em um modelo de otimização quadrática. Podemos construir uma carteira ótima, isto é, dado um certo nível de risco, encontramos aquela carteira com o maior retorno possível, dentre todas aquelas que constituem o nosso universo de escolha, ou vice-versa. Esta definição retrata aquilo que

Markowitz chamou de “fronteira eficiente”. Logo, os investidores devem escolher carteiras de investimentos que estejam na fronteira eficiente, pois elas estariam maximizando as suas utilidades esperadas dos retornos futuros.

## 2.2. Processos Estocásticos e Simulação de Monte Carlo

Para a elaboração de um modelo multiperíodo é necessária a descrição da evolução de preços através de um processo estocástico. Na literatura Jorion (2003) Hibiki (2001) e Hull (1997) descrevem a evolução de preços através de um processo de Wiener. O modelo pressupõe que as inovações do preço do ativo não são autocorrelacionados e que pequenas oscilações nos preços dos ativos podem ser descritas pela seguinte equação:  $dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz$  onde  $dz$  é uma variável aleatória normalmente distribuída com média zero e variância  $dt$ . Os parâmetros  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  representam o desvio e a volatilidade instantânea no momento  $t$ , que podem evoluir com o tempo.

Na prática, as carteiras de investimento possuem mais de uma fonte de risco financeiro, o que nos obriga a trabalhar com uma distribuição multivariada, e exige que a descrição da evolução dos preços dos ativos que compõem uma carteira leve em conta a correlação entre eles.

A solução para este tipo de problema consiste em utilizar métodos de simulação, como o método de Monte Carlo. Este método gera pontos independentes pseudo-aleatórios que tentam preencher um espaço  $N$ -dimensional, onde  $N$  é o número de fatores de risco que influenciam os preços de uma carteira. As simulações conseguem tratar adequadamente carteiras que dependem de mais de uma variável porque o tempo de processamento aumenta linearmente com  $N$ , enquanto que ele aumenta geometricamente com  $N$  para métodos binomiais ou de diferenças finitas (JORION, 2003).

Um das formas de se obter uma simulação, sem nenhuma simplificação com relação às correlações entre os ativos da carteira, consiste na utilização da decomposição de Cholesky da matriz variância-covariância dos ativos. Assim obtém-se uma série de cenários simulados que através da técnica de Clustering podem ser agrupados para geração de uma árvore de cenários. O objetivo da geração de árvores de cenários é representar de forma clara e concisa a evolução dos possíveis caminhos que uma variável aleatória pode seguir, transformando o problema estocástico num problema determinístico o que reduz o seu tamanho e complexidade de resolução. Técnicas de geração de árvores foram propostas por Pflug (2001) e Hoyland (2001).

## 3. O Modelo

O modelo a seguir é baseado no trabalho de Hu (2003) que propõe a construção de uma árvore de cenários por simulação. O modelo utiliza a técnica da simulação em paralelo, na qual cada um dos cenários pertencentes a um dado nó da árvore é obtido a partir do valor atual da variável aleatória. Dessa forma, há apenas a necessidade de se executar uma vez a simulação, economizando tempo e esforço computacional. Após a simulação, uma técnica de clustering como a proposta por Gulpinar (2001) é aplicada para arranjar os caminhos simulados em clusters, de forma a construir uma árvore de cenários. Assim, limitamos significativamente o número de variáveis de decisão do problema – os caminhos simulados são substituídos por clusters que representam as possíveis realizações da variável aleatória tomando o cuidado para não violar o conceito de não-antecipacidade.

O modelo a ser aplicado considera um horizonte de investimento  $T$ , onde o tempo varia de  $t = 0$  a  $t = T$ , e decisões condicionadas são tomadas a cada instante de tempo  $t = 0, \dots, T - 1$ .

Um conjunto formado por  $N$  ativos com risco está disponível para a seleção da carteira de investimento.

Seja  $P_t = (P_{t1}, \dots, P_{tm})'$ ,  $t = 0, \dots, T$ , o vetor de preços dos ativos com risco. Claramente, este vetor comporta as variáveis aleatórias de nosso modelo. As possíveis realizações dos preços dos ativos  $P_t$  onde  $t = 0, \dots, T$ , são descritas através de  $J$  caminhos simulados, obtidos via simulação Monte Carlo:  $J^{(i)} = \{P_0, P_1, \dots, P_T^{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, J$ , começando do estado inicial  $P_0$  e transcorrendo todo o horizonte de investimento, desde  $t = 0$  até  $t = T$ . No início do horizonte de investimento, assume-se que o estado inicial  $P_0$  é conhecido com certeza. A cada instante de tempo  $t$ , os caminhos que possuem características semelhantes são divididos em clusters, e diferentes decisões podem ser tomadas em cada cluster. O processo é repetido para  $t = 1, \dots, T - 1$ , até se construir uma árvore de cenários.

Na formação dos clusters, a dissimilaridade entre dois pontos, correspondente aos vetores de preços  $P_t^{(i_1)}$  e  $P_t^{(i_2)}$ , é medida utilizando a distância euclidiana:

$dist(P_t^{(i_1)}, P_t^{(i_2)}) = \left\{ \sum_{j=1}^J |P_{tj}^{(i_1)} - P_{tj}^{(i_2)}|^2 \right\}^{1/2}$ . Claramente, percebe-se que quanto menor a

distância, mais similares são os pontos, indicando que eles podem fazer parte do mesmo cluster. Dessa forma, a árvore de cenários pode ser gerada utilizando um método de agrupamento, a partir da matriz de dissimilaridades dos preços dos ativos. Entre os métodos existentes na literatura, empregou-se o método de WARD, que é amplamente usado em problemas de otimização financeira e considerado superior aos outros métodos existentes na prática.

Uma vez obtido um conjunto aceitável de valores agregados, ou seja, obtido o *cluster*, é preciso representá-lo por um único valor que tornará o dado associado com o nó numa árvore de cenários. Este valor é comumente chamado de centróide do *cluster*. Assim, é preciso fixar a noção de centro, sendo as mais utilizadas as seguintes: média, mediana, centro de gravidade, entre outras. Optou-se pela utilização da média, dado que a média representaria num valor único o conjunto dos pontos obtidos no *cluster*. Entretanto, tal escolha poderia ser viesada, dado que se no conjunto dos pontos obtidos houvesse a presença de valores extremos, tanto para cima, quanto para baixo, o valor representado pela média poderia estar distorcido. Para contornar este eventual problema, utilizou-se um número relativamente grande de caminhos simulados na simulação Monte Carlo. Conseqüentemente, o número de caminhos passando por cada *cluster* seria maior, gerando valores médios menos distorcidos.

O modelo considera uma carteira de investimentos composta por  $N$  ativos com risco e um ativo livre de risco (*risk free*), num horizonte de investimento  $T$ . Além disso, assume-se que não é permitida a alavancagem financeira da carteira. Isto ocorre quando o investidor aloca mais de 100% do patrimônio da carteira nos ativos com risco. Isto seria possível se o investidor tomasse dinheiro emprestado à taxa livre de risco no mercado para a compra dos ativos com risco.

Primeiramente, definimos os parâmetros, bem como as notações que serão empregadas no modelo de simulação:

$I = \{1, \dots, N\}$ : conjunto dos ativos que podem ser escolhidos para formar a carteira;

$\pi_s, s = 1, \dots, S$ : probabilidade de ocorrência do cenário  $s$ ;

$X_{is}(t), i \in I, t = 0, \dots, T$  : quantidade do ativo  $i$  no tempo  $t$  no cenário  $s$  na carteira;

$A_{is}(t), i \in I, t = 0, \dots, T - 1$  : quantidade do ativo  $i$  comprado no tempo  $t$  no cenário  $s$ ;

$V_{is}(t), i \in I, t = 0, \dots, T - 1$  : quantidade do ativo  $i$  vendido no tempo  $t$  no cenário  $s$ ;

$X_{n+1s}(t), t = 0, \dots, T$  : quantidade de caixa no tempo  $t$  no cenário  $s$  na carteira;

$cta$  : custo de transação expresso como porcentagem do total dos ativos comprados;

$ctv$  : custo de transação expresso como porcentagem do total dos ativos vendidos;

$d^+ = (1 + cta), d^- = (1 - ctv)$ ;

$r$  : taxa livre de risco, supostamente constante ao longo do tempo e sobre todos os cenários;

$P_{is}(t), i \in I, t = 0, \dots, T$  : preço do ativo  $i$  no tempo  $t$  no cenário  $s$ ;

$R_s(t), t = 0, \dots, T$  : riqueza no tempo  $t$  no cenário  $s$ , dado pelo valor da carteira em  $t$ ;

$U(\cdot)$  : função utilidade de um investidor avesso ao risco;

A função objetivo do modelo busca a maximização da utilidade esperada da riqueza futura do indivíduo. O problema é então formulado como um problema de programação linear de grande porte com uma matriz de coeficientes esparsa.

Matematicamente, temos:

$$\underset{\substack{X(0,s), \dots, X(T,s) \\ s=1, \dots, S}}{\text{MAX}} \sum_{s=1}^S \pi_s U(R_s(T)) \quad (1)$$

$$s.a. \quad X_{is}(t+1) = X_{is}(t) + A_{is}(t) - V_{is}(t), \quad (2)$$

$$X_{n+1s}(t+1) = (1+r) \left[ X_{n+1s}(t) - d^+ \sum_{i=1}^n P_{is}(t) A_{is}(t) + d^- \sum_{i=1}^n P_{is}(t) V_{is}(t) \right], \quad (3)$$

$$A_{is}(t) \geq 0, \quad (4)$$

$$V_{is}(t) \geq 0, \quad \text{para} \quad t = 0, \dots, T-1; \quad (5)$$

$$R_s(t) = X_{n+1s}(t) + \sum_{i=1}^n X_{is}(t) P_{is}(t), \quad (6)$$

$$X_{is}(0) = X_{i0}, \quad (7)$$

$$X_{n+1s}(0) = X_{n+10}, \quad (8)$$

$$X_{is}(t) \geq 0, \quad (9)$$

$$X_{n+1s}(t) \geq 0, \quad \text{para} \quad t = 0, \dots, T; \quad i = 0, \dots, N; \quad s = 0, \dots, S; \quad (10)$$

$$X(t, s) = \{X_{1s}(t), \dots, X_{ns}(t), X_{n+1s}(t), A_{1s}(t), \dots, A_{ns}(t), V_{1s}(t), \dots, V_{ns}(t)\} \text{ para } t = 0, \dots, T-1;$$

$$X(T, s) = \{X_{1s}(T), \dots, X_{ns}(T), X_{n+1s}(T)\} \text{ para } t = T;$$

As restrições 2 e 3 são, respectivamente, restrições de estoque dos ativos e fluxos de caixas. A restrição 6 diz respeito à riqueza do indivíduo num tempo  $t$ , num cenário  $s$  dado pelo somatório do caixa mais o valor a mercado dos ativos multiplicado pelas respectivas quantidades. As demais restrições ilustram a não negatividade das variáveis do modelo.

#### 4. Resultados

O horizonte de investimento considerado na simulação das carteiras foi  $T = 20$  dias úteis (1 mês). O horizonte engloba o período de 09 de setembro de 2005 a 07 de outubro de 2005. Além disso, decisões de mudança de investimento poderão ser tomadas uma vez por semana. Assim, em cada instante de tomada de decisão  $t$  ( $t = 0, t = 5, t = 10, t = 15$ ), encontraremos uma nova composição da carteira determinada pelo modelo. Embora o modelo proposto apresente decisões de tomada de investimento a cada unidade de tempo  $t$ , onde  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ , decidiu-se pelo rebalanceamento semanal da carteira. Dessa forma, o modelo se aproxima da realidade vivida pelos gestores de carteiras, onde as decisões de investimento tomadas não são de curto prazo.

A fim de minimizar o risco de uma carteira, os investidores devem apostar em empresas com características econômicas não similares. Geralmente, essas empresas possuem correlação menor que as firmas de um mesmo setor econômico. Baseado nessas informações utilizou-se como variáveis de entrada as seguintes ações:

NÚMERO	SETOR ECONÔMICO	AÇÃO	FRAÇÃO	PREÇO (R\$)	CÓDIGO
1	Telecomunicações	Telemar PN*	10,73%	34,95	TNLP4
2	Petróleo e Gás	Petrobrás PN*	10,59%	34,52	PETR4
3	Bens Industriais	Embraer PN*	9,80%	21,29	EMBR4
4	Materiais Básicos	Vale R Doce PNA*	11,49%	74,90	VALE5
5	Consumo Não Cíclico	Ambev PN*	10,05%	818,95	AMBV4
6	Financeiro e Outros	Itaubanco PN*	9,68%	52,60	ITAU4
7	Utilidade Pública	Cemig PN*	10,89%	88,75	CMIG4
8	Consumo Cíclico	Net PN*	11,42%	0,93	NETC4
9	Construção e Transporte	CCR Rodovias ON	9,21%	60,00	CCRO3
10	Caixa	-	6,14%	2.000,00	CAIXA

Tabela 1 – Variáveis de Entrada do Modelo de Otimização

Para a elaboração do modelo de otimização, foram coletados os preços diários das ações desde 22 de fevereiro de 2005 até 09 de setembro de 2005. Para efeitos de simplificação dos cálculos, considerou-se que a carteira é composta por uma unidade de negociação de cada ação, isto é, o valor total da carteira nada mais é do que o somatório dos preços de cada ação em uma determinada data.

Em seguida, calculou-se a matriz de variância-covariância dos retornos dos ativos. Para determinarmos as variâncias e as covariâncias, utilizou-se um modelo EWMA, numa janela de 30 dias com os dados dos retornos geométricos diários de cada ativo.

A simulação Monte Carlo foi então realizada utilizando um horizonte de investimento  $T = 20$  dias úteis com  $J = 1000$  caminhos simulados. Dessa forma, encontramos um vetor, composto pelos retornos de cada um dos nove ativos, para cada instante de tempo  $t$  e para cada caminho simulado  $q$ , onde  $q = 1, 2, \dots, J$ . A evolução dos preços dos ativos é então calculada com base nos vetores de retornos geométricos encontrados na simulação Monte Carlo, utilizando a

seguinte expressão:  $P_{it}^{(q)} = P_{it-1}^{(q)} * EXP(r_{it}^{(q)} * \Delta t)$  para  $t = 1, 2, \dots, T$ ,  $q = 1, 2, \dots, J$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  onde  $\Delta_t = 1$ , neste caso.

A partir desses caminhos simulados, iniciou-se o processo da divisão dos clusters para a obtenção dos centróides que constituirão os nós da árvore de cenários. Em cada instante de tomada de decisão  $t$  ( $t = 0, t = 5, t = 10, t = 15$ ), foi aplicada a técnica de clustering, obtendo 2 subclusters para cada cluster inicial. Dessa forma, obtivemos um modelo binomial da evolução dos preços das ações que será utilizado pelo modelo de otimização.

Para a resolução do modelo de otimização empregou-se o método dos pontos interiores, indicado para a resolução de problemas de programação linear de grandes dimensões. O modelo de otimização foi utilizado em cada instante de tomada de decisão  $t$  ( $t = 0, t = 5, t = 10, t = 15$ ) sendo os dados dos preços das ações atualizados e uma nova matriz de variância-covariância obtida a cada  $t$ .

A figura 1 consolida os resultados obtidos. Nela, observamos a evolução do valor da carteira ao longo do horizonte de investimento  $T$  e nos instantes de tomada de decisão  $t$ . A carteira do modelo apresentou um retorno de 1,81% ao longo do período (1 mês).

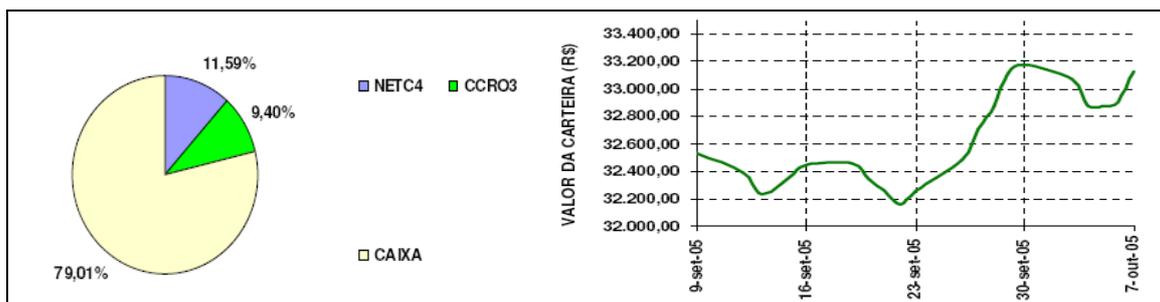


Figura 1 - Resultados do modelo de otimização

Em seguida foi realizada uma análise de sensibilidade para se analisar como a carteira de investimento se comporta dada uma mudança no valor dos parâmetros do modelo, como custos de transação e taxa livre de risco, bem como a adição de novas restrições no modelo. Neste contexto, dois casos particulares do modelo em estudo foram analisados.

No primeiro caso considerou-se a limitação de caixa. Analisando a carteira encontrada pelo modelo, percebemos que a quantidade em caixa representa quase que 80% do valor da carteira ao longo do horizonte de investimento  $T$ . Isto se deve, entre outros fatores, a elevada taxa de juros vigente no país atualmente. Dessa forma, é mais conveniente aplicar o dinheiro em títulos de renda fixa do que em ações, que são ativos mais arriscados. Para limitarmos a quantidade em caixa da carteira, introduzimos uma nova restrição no modelo:  $X_{n+15}(t) \leq 9500$ . O valor de R\$ 9,500 representa aproximadamente 30% do valor da carteira inicial. Esta porcentagem é usualmente utilizada pela maioria dos fundos de ações no Brasil como um valor máximo da participação do caixa na composição da carteira do fundo. A figura 2 consolida os resultados obtidos. A carteira com a limitação de caixa apresentou um retorno de 1,75% ao longo do período (1 mês).

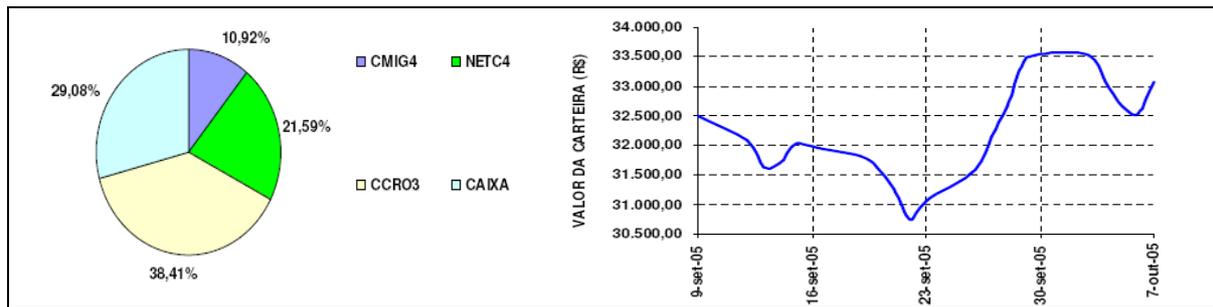


Figura 2 - Resultados da Análise de Sensibilidade 1

Na segunda análise considerou-se a quantidade mínima de ações na carteira. A quantidade mínima foi definida arbitrariamente como sendo metade da quantidade inicial. Além disso, a restrição de limitação de caixa foi mantida, pois ela aproxima a carteira do modelo de uma situação real. Dessa forma, devemos adicionar as seguintes restrições no modelo definido pela análise de sensibilidade I:

$$X_{1_s}(t) \geq 50, X_{2_s}(t) \geq 50, X_{3_s}(t) \geq 75, X_{4_s}(t) \geq 25, X_{5_s}(t) \geq 2, X_{6_s}(t) \geq 30, X_{7_s}(t) \geq 20, \\ X_{8_s}(t) \geq 2000, X_{9_s}(t) \geq 25, \text{ para } t = 0,5, \dots, T; \text{ e } s = 1, \dots, S;$$

Os resultados obtidos foram:

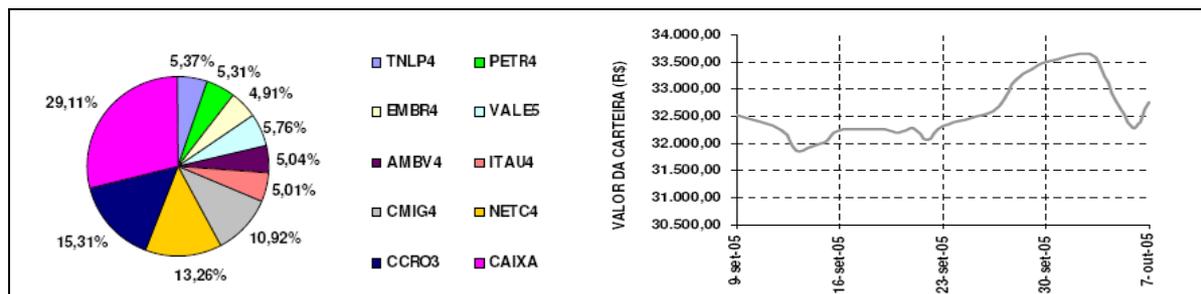


Figura 3 - Resultado da Análise de Sensibilidade 2

A carteira com a limitação de caixa e quantidade mínima de ações apresentou um retorno de 0,76% ao longo do período (1 mês). Os resultados obtidos pelo modelo foram satisfatórios, na medida em que eles refletem aquilo que se esperava de acordo com a teoria de carteiras. Além disso, todas as soluções encontradas foram factíveis. A comparação dos resultados será realizada na próxima seção juntamente com a conclusão do trabalho.

## 5. Conclusões

O objetivo deste trabalho foi construir um modelo multiperíodo na determinação de carteiras ótimas de investimento para ser utilizado no mercado de ações brasileiro. Para avaliar o desempenho do modelo os resultados obtidos com o modelo geral e as análises de sensibilidades foram confrontados com índices benchmark de mercado. Percebeu-se que no período considerado, o IBOVESPA apresentou uma rentabilidade maior que as carteiras simuladas chegando a 2,24%. Uma das razões para este melhor desempenho consiste no fato de que, no período considerado, a bolsa brasileira registrou uma alta rentabilidade comparada a períodos recentes. Além disso, o índice BOVESPA é composto por uma cesta de 54 ações, enquanto que as carteiras simuladas podiam apresentar no máximo 9 ações. Dessa forma, a probabilidade de existirem ações que tiveram um melhor desempenho que aquelas

selecionadas para a composição da carteira em estudo é relativamente alta.

Já quando é realizada a comparação das rentabilidades das carteiras simuladas com a rentabilidade do CDI, que foi de 1,41%, percebe-se que no período considerado, apenas a carteira do modelo da análise de sensibilidade 2 apresentou desempenho inferior ao índice.

A tabela 2 apresenta as rentabilidades, ao longo do horizonte de investimento, das ações consideradas na seleção das carteiras. Pode-se perceber que as ações que apresentaram as maiores rentabilidades no período foram a VALE5, NETC4 e CCRO3. Não obstante, as ações NETC4 e CCRO3 foram as ações que apresentaram um maior peso em todas as carteiras simuladas. Entretanto, a ação VALE5 não foi selecionada para nenhuma carteira. Como o processo de decisão da carteira ótima é baseado na simulação de variâncias e covariâncias passadas das ações, muitas vezes o modelo demora a incorporar as informações mais recentes embutidas nos preços das ações, embora estivéssemos utilizando um modelo EWMA numa janela de 30 dias úteis.

CÓDIGO	RENTABILIDADE	CÓDIGO	RENTABILIDADE	CÓDIGO	RENTABILIDADE
TNLP4	2,54 %	ITAU4	2,07 %	CMIG4	-7,55 %
PETR4	-7,86 %	VALE5	5,19 %	NETC4	3,17 %
EMBR4	-1,32 %	AMBV4	1,10 %	CCRO3	3,73 %

Tabela 2 – Rentabilidades das ações ao longo do horizonte de investimento T

Considerando os resultados obtidos, percebe-se que o modelo forneceu resultados satisfatórios, na medida em que as carteiras simuladas apresentaram rentabilidades similares aos índices de mercado.

Embora o artigo seja focado no mercado de capitais, naturalmente o modelo se aplica às mais diversas análises de composição de carteiras – inclusive mix de produto – na engenharia de produção. O objetivo deste artigo foi desenvolver um modelo de otimização multiperíodo de carteiras de investimento. O tema surgiu da necessidade do mercado por novos métodos quantitativos de seleção de carteiras de investimento, haja vista que alguns modelos atuais já se encontram ultrapassados e amplamente difundidos entre os participantes do mercado financeiro brasileiro. Dessa forma, buscou-se desenvolver um modelo inovador que proporcionasse uma vantagem competitiva. Todo o aparato teórico e prático desenvolvido neste trabalho pode ser aplicado em problemas de pesquisa operacional aplicados em engenharia de produção.

Os modelos multiperíodo ainda se encontram em estágio inicial de desenvolvimento no mercado financeiro brasileiro. Muito pouco tem sido criado ou discutido na literatura nacional. Portanto este trabalho vem enriquecer de maneira satisfatória esta literatura. O modelo utilizado parece se adequar melhor a decisões de longo prazo, condizentes com um fundo de administração de recursos de um plano de previdência complementar. Dessa forma, uma recomendação de continuação do trabalho seria sua aplicação para decisões de investimento de longo prazo, com rebalanceamentos num período suficientemente grande de tempo (bimestral, semestral, anual) para que se possam evidenciar as mudanças de posições em cada instante de tomada de decisão.

## Referências

FRANCIS, J. C.; ARCHER, S. H. *Portfolio Analysis*, 2ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 1979.

GULPINAR, N.; RUSTEM, B.; STTERGREN, R. *Simulation and optimization approaches to scenario tree*

generation, Working Paper, 2001.

**HIBIKI, N;** *Multi-period stochastic optimization models for dynamic asset allocation*, 2001

**HOYLAND, K; WALLACE, S, W;** *Generating Scenario Trees for Multistage Problems*. Management science 47 (2), 295-307, 2001.

**HU, H;** *A New Simulation-Based Approach for Multi-Period Portfolio Optimization Problems*. Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, 2003.

**HULL, J, C;** *Options, Futures and Others Derivatives*, 3ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 1997.

**JOLIG, R.** *Modelo de Otimização Dinâmica para a Gestão de Longo Prazo dos Recursos de um Plano de Previdência Complementar*. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica – USP. São Paulo, 2003.

**JORION, P.** *Value at Risk: A Nova Fonte de Referência para a Gestão de Risco Financeiro*, 2ª ed. Bolsa de Mercadorias & Futuros (BMF), 2003.

**MARKOWITZ, H.M.** *Portfolio selection*. Journal of Finance, v.7 n.1, 1952.

**PFLUG, G,CH.** *Scenario tree generation for multiperiod financial optimization by optimal discretization*. Mathematical Programming, Ser B 89, pp251-257, 2001.

**WINSTON, W, L.** *Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms*, 2ª ed. Belmont, Califórnia: Duxbury Press, 1995.