

CARTA DE CONTROLE PARA MONITORAMENTO DE FRAÇÃO DE CONFORMES UTILIZANDO UM NOVO ESTIMADOR

Ruth Pereira Lourenço (USP)

ruth.p.lourenco@gmail.com

Linda Lee Ho (USP)

lindalee@usp.br

Roberto da Costa Quinino (UFMG)

roberto@est.ufmg.br



Cartas de controle têm sido umas das ferramentas mais utilizadas para monitorar o processo. No caso de monitorar a proporção de itens conformes, tradicionalmente, o estimador proporção amostral tem sido utilizado, porém requer um tamanho razoável de amostra para ter um bom desempenho. Este artigo apresenta e analisa basicamente uma carta de controle empregando um novo estimador para a proporção de conformidade que apresente bons índices de desempenho mesmo para tamanho pequeno de amostras e alta qualidade. Para a análise do comportamento do estimador proposto e do tradicionalmente utilizado foi desenvolvido um programa em linguagem VBA para ser executado no Excel que permite a comparação do desempenho dos estimadores através principalmente do parâmetro chamado ARL.

Palavras-chaves: Proporção amostral; Carta de controle p; novo estimador para proporção de conformidade; ARL

1. Introdução

O monitoramento efetivo das características da qualidade de um processo de produção depende, na maioria das vezes, de ferramentas estatísticas para a detecção, identificação e análise das causas significativas responsáveis por variações que afetam o comportamento do processo de forma imprevisível. Estas técnicas podem ser utilizadas em processos indústrias que geram bens de consumo, em processos de empresas que são prestadoras de serviços e até mesmo na área médica em testes clínicos.

O início formal do Controle Estatístico de Processo (CEP) deu-se por volta de 1924, quando Walter A. Shewhart desenvolveu e aplicou os gráficos de controle nos Bell Telephone Laboratories. De acordo com MONTGOMERY (2004), a melhoria da qualidade em processos, de maneira geral, pode ser traduzida na redução da variabilidade nos processos e produtos. Ela tornou-se um dos pontos decisivos na manutenção dos produtos no mercado devido, principalmente, a grande concorrência e a maior exigência dos consumidores.

Além dos gráficos de controle, o CEP é formado por mais seis ferramentas que formam um conjunto de técnicas estatísticas, organizadas de modo a proporcionar, através de suas aplicações, a manutenção e a melhoria dos níveis de qualidade de um processo. A carta de controle (ou gráfico de controle) é a apresentação gráfica de uma característica da qualidade que foi medida ou calculada a partir da amostra versus o número da amostra ou tempo. Ela contém uma linha central (LC), que está associada ao valor esperado de uma estatística monitorada, e outras duas linhas horizontais, chamadas de limite superior de controle (LSC) e limite inferior de controle (LIC) que são obtidas somando e subtraindo, respectivamente, k (constante) vezes o valor do desvio-padrão dessa estatística a LC. Ela pode ser basicamente de dois tipos: para atributos ou para variáveis.

Os gráficos de controles para atributos avaliam parâmetros tais como proporção de conformidade ou taxa média de ocorrência de alguma quantidade de interesse. De modo sucinto, existem quatro subtipos de gráficos de controle para atributos mais utilizados, os quais são: Gráfico de Controle para a fração não-conforme (p), Gráfico de Controle para o número de não-conformidades (np), Gráfico de Controle para não-conformidades (c) e Gráfico de Controle para não-conformidades por unidade (u). (Maiores detalhes ver MONTGOMERY, 2004 e COSTA et al, 2004)

Este projeto tem como base de estudo o primeiro tipo de gráfico, o gráfico p , contudo, por ser mais conveniente, trabalha-se com a fração de itens conformes ao invés de a fração de itens não-conformes como é comumente encontrado na literatura. A abordagem tradicional, baseada nos estimadores existentes, requer, porém um tamanho razoável de amostra para apresentar um bom desempenho. Portanto, a proposição e a avaliação do novo estimador para o parâmetro da proporção de uma distribuição de binomial que apresentam bons índices de desempenho para amostras pequenas se fazem necessárias para a continuidade da melhoria da qualidade nos processos e a garantia de altas qualidades.

Apesar desse tema ser antigo e já bastante estudado, é importante ressaltar que ele ainda desperta interesse entre muitos pesquisadores. Como exemplo disso, pode-se citar BÖHNING & VIWATWONGKASEM (2005) que também estudaram uma nova maneira de calcular este estimador p .

2. O Novo Estimador e suas propriedades

Itens conformes são aqueles itens que satisfazem o padrão em todas as características analisadas. O estimador tradicional da fração de conformidade é a proporção amostral, definida como a razão entre o número de itens conformes em uma população e o total de itens amostrados, denotado por \hat{p} : $\hat{p} = \frac{X}{n}$, em que n é o número total da amostra e X é o número de itens conformes da amostra. Este estimador \hat{p} é referido ao longo deste texto como “estimador antigo” já que é o tradicionalmente utilizado.

Os princípios estatísticos que envolvem este tipo de estimador estão baseados na Distribuição de Binomial. Considerando n experimentos independentes de Bernoulli (variável aleatória X), têm-se duas possibilidades: sucesso com probabilidade p e fracasso com complementar probabilidade $(1-p)$. E, assim, a probabilidade do número total de sucessos de X em n é dada por:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Dois características importantes de \hat{p} são a sua média e a sua variância, as quais são calculadas, respectivamente por: $\mu = p$; $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}$. Como a média é igual ao valor de p , pode-se dizer que o estimador apresenta a propriedade de ser não viciado.

Já o novo estimador possui suas bases nos mesmos princípios estatísticos do estimador apresentado acima, ou seja, ele também está baseado na Distribuição Binomial. Contudo, agora consideram-se duas amostras de Bernoulli n_1 e n_2 , onde $n = n_1 + n_2$ e $n_1 \geq 2$. Para o caso de $n=7$ tem-se duas combinações possíveis, as quais são: $n_1=2$ e $n_2=5$, e $n_1=3$ e $n_2=4$.

Para o cálculo efetivo desse novo estimador, considerem as proporções amostrais obtidas com tamanhos de amostras n_1 e n_2 (vide expressão 2.1). Caso ambas forem diferentes de zero, o novo estimador é definida como a média ponderada das proporções definida em (2.1) com fator ponderação igual à própria proporção amostral e zero quando ambas proporções forem iguais a zero, conforme expressão (2.2).

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}; \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} \quad (2.1)$$

$$\tilde{p} = 0, \quad \text{se } \hat{p}_1 = \hat{p}_2 = 0 \quad (2.2)$$
$$\tilde{p} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{\hat{p}_1 + \hat{p}_2}, \quad \text{caso contrário}$$

É importante ressaltar que, a distribuição de probabilidade do estimador tradicional \hat{p} é baseada numa uma distribuição binomial, enquanto que a distribuição de probabilidade do novo \tilde{p} é uma combinação de distribuições binomiais de \hat{p}_1 e de \hat{p}_2 .

Este novo estimador proposto apresenta algumas propriedades interessantes. Ele é

a) Viciado, porém assintoticamente não-viciado;

b) Consistente.

Como pode ser provado, o fato do estimador ser viciado significa que para n razoavelmente pequeno, a média do estimador é diferente de p , ao contrário do que acontece com o estimador “antigo” que é não-viciado. Porém, ele também é assintoticamente não-viciado, ou seja, quando o valor de n tende ao infinito, a sua média tende ao valor de p . E, por fim, ele também é consistente, pois quando n tende ao infinito além de sua esperança (média) tender a p , sua variância tende a zero.

A partir dessas propriedades, pode-se dizer que o novo estimador é menos eficiente que o de proporções amostrais. Contudo, quando o critério de comparação entre ambos estimadores passa a ser o erro quadrático médio (MSE – Mean Square Errors) pode-se notar que o novo estimador é mais eficiente que o tradicional (ou seja, quando o MSE de \tilde{p} é menor que o de \hat{p} para uma faixa de valores de p). Para o caso do estimador antigo, o MSE é conhecido e dado por $\frac{p(1-p)}{n}$, porém para o estimador \tilde{p} , não existe uma expressão fechada podendo ser

calculado computacionalmente. Figura 1 mostra a razão entre MSE das duas proporções (\hat{p} e \tilde{p}) para n variando de 2 a 200 e p entre 0 e 1 para alguns casos onde $n_1=n_2$. Pode-se observar que o MSE (\tilde{p}) é menor que o MSE (\hat{p}) para $p>0,75$ e também que quanto menor for o tamanho da amostra, mais favorável é para o MSE de \tilde{p} . Isto nos permite mostrar o quanto o novo estimador é interessante para sistemas de alta qualidade quando não permite usar amostras muito grandes. Como exemplo, Tabela 1 compara alguns valores de MSE para os dois estimadores. (O valor apresentado na tabela é aproximado e, no caso do novo estimador, é obtido para uma das possíveis combinações de n .)

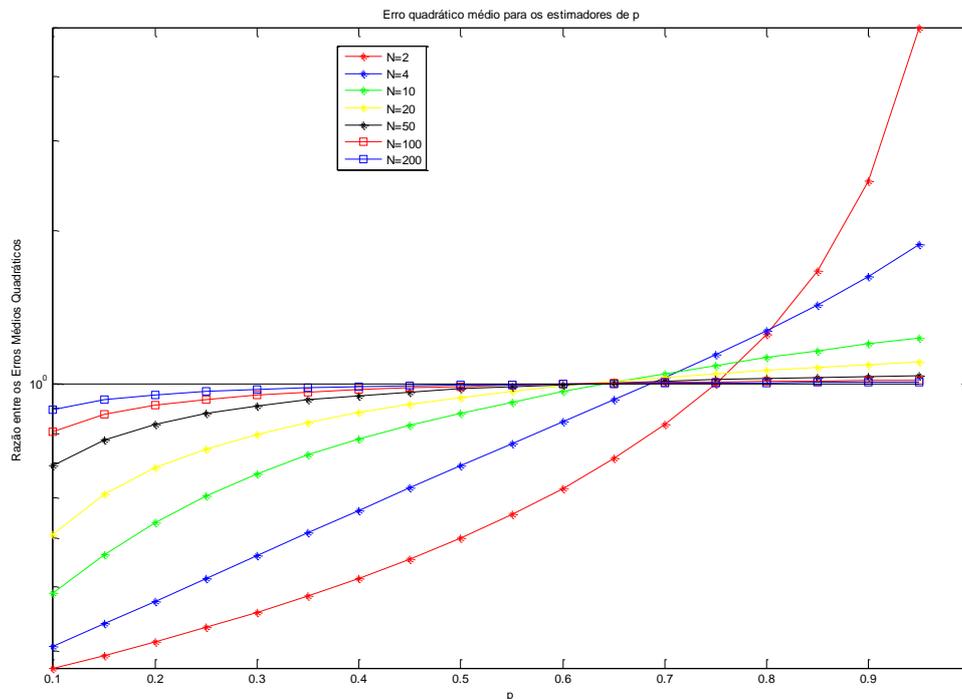


Figura 1 – Razão do Erro Quadrático Médio de \hat{p} e \tilde{p} versus p

Valores de n e p	MSE Antigo	MSE Novo
n=4 e p=0,7	0,0525	0,0414
n=4 e p=0,9	0,0225	0,0128
n=8 e p=0,99	0,0012	0,001

Tabela 1 - Comparação do erro quadrático médio (MSE).

Portanto, o fato do novo estimador apresentar melhores valores de erro quadrático médio para amostras pequenas vem de encontro com o objetivo desse projeto. Amostras de tamanho reduzido são cada vez mais importantes visto que, existem muitos casos em que o custo de inspeção é muito caro ou que o ensaio para a inspeção é destrutivo e, por consequência, caro também.

3. As Cartas de Controle p

As cartas de controle podem ser consideradas um modelo de representação de estimadores. Neste trabalho, elas serão utilizadas para mostrar o comportamento de cada estimador e poder-se fazer uma comparação entre ambos para valores de parâmetros determinados. Para auxiliar nesta comparação foi desenvolvido um programa no Office Excel utilizando a linguagem VBA (Visual Basic for Applications) (Maiores detalhes ver JELEN, 2004 e GETZ, 2000). Esse programa tem como objetivo a automatização de tarefas e rotinas repetitivas a fim de poder simular e comparar o comportamento dos dois estimadores para variados parâmetros.

Na literatura em geral, amostras menores 30 são consideradas pequenas. Além do tamanho da amostra n , outros parâmetros importantes no planejamento de uma carta de controle são os limites de controle e o intervalo de inspeção. A comparação do desempenho da carta de controle p utilizando dois estimadores diferentes para a fração de conformidade, será através do ARL (Average Run Lengths ou Comprimento Médio da Sequência - CMS). Ele representa a quantidade média de amostras ou observações para que o gráfico sinalize um estado fora de controle, ou seja, retorna o número de amostras que são retiradas até a ocorrência de um alarme falso (para processo sob controle) ou o número esperado de amostras retiradas até a detecção do desvio (para processo fora de controle).

Tradicionalmente, calculam-se a linha central e os limites de controles para os gráficos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}LSC &= p_0 + k\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \\LC &= p_0 \\LIC &= p_0 - k\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde p_0 é o valor de fração de conformidade quando o processo está sob controle e tradicionalmente emprega-se $k=3$ caso fosse adotar o erro do tipo I $\alpha=0.0027$. Contudo, na atual proposição tanto utilizando o estimador tradicional como o novo, os limites de controle não podem ser determinados conforme (3.1). No entanto, os dois estimadores assume valores

discretos assim dificilmente os limites de controle serão determinados de modo a alcançar o nível do erro do tipo I fixado em 0,27% . Desta forma serão analisados dois casos: 1) obter limites de controle tal que acumule valor do erro do tipo I imediatamente maiores que 0.0027 e o outro caso é determinar limites de controle tal que acumule valor do erro do tipo I com valores imediatamente abaixo da referência. Este risco alfa: erro do tipo I (α) representa a chance do gráfico de controle sinalizar causas especiais inexistentes. A partir desses valores, podem-se ser calculados os valores de ARL_0 (dada através da razão de $1/\alpha$, cujo valor de referência, é de 370).

Em contrapartida, podem-se também ser calculados os valores de ARL_1 para cada conjunto de valores de fração de conformidade p quando o processo está fora de controle. Este é um outro importante parâmetro de comparação que fornece o poder de detecção do gráfico, isto é, quando o processo está fora de controle qual é o número de amostras necessárias para isso ser detectado.

Para exemplificar o que foi dito acima, Tabela 2 foi construída. Ela representa a saída do programa em VBA e mostra o comportamento dos estimadores para $n=7$ e $p_0=0,999$. Algumas notações foram utilizadas nesta tabela, como as palavras Old e New que representam, respectivamente, o antigo e o novo estimadores. A letra L ou M, presentes após estas palavras, significam qual foi o valor do erro do tipo I, admitido uma vez que ele pode estar acima ou abaixo do valor de referência escolhido, respectivamente (L, valores do erro de tipo I menores que o valor de referência e M, valores maiores). Além disto, no caso do novo estimador um número foi adicionado na notação. Este foi instituído para se diferenciar os novos estimadores, já que, normalmente, para um mesmo tamanho de amostra n existe mais de uma combinação (n_1 e n_2) possível. Ele representa o tamanho da amostra adotado para n_1 . Por exemplo, “New L3” significa que se tratada do novo estimador adotando um valor abaixo do valor de referência para o erro do tipo I e o tamanho de amostra igual a 3 para n_1 .

Tabela 2 permite comparar o desempenho dos dois estimadores. Pode-se notar que, para este caso, o ARL_0 é melhor, ou seja, mais próximo do valor de referência para alguns casos do novo estimador (como New_M2 e New_L3) enquanto que os ARL_1 's obtidos com o estimador tradicional ficam muito aquém do valor de referência. Para fazer comparação em relação ao ARL_1 , alguns cuidados na interpretação dos resultados devem ser tomados. Não se pode fazer comparação direta entre valores de ARL_1 , uma vez que os obtidos com o estimador tradicional (no caso Old L) estão subestimados dando a falsa impressão de um melhor desempenho (uma detecção mais rápida) assim como no caso de OldM, os valores de ARL_1 estão superestimados.

	p	Old L	Old M	New L2	New M2	New L3	New M3
Sob-							
controle	0,999	143,28	47778,07	143,31	498,02	333,00	47780,34
Fora de							
controle	0,99	14,72 (34.21)	492,36	14,74	48,16	33,03	492,59
	0,94	2,84 (6.60)	16,19	2,87	7,05	5,38	16,23
	0,89	1,79 (4.16)	5,71	1,82	3,60	2,96	5,74
	0,84	1,42	3,21	1,44	2,42	2,09	3,24
	0,79	1,24	2,22	1,26	1,86	1,67	2,24
	0,74	1,14	1,73	1,16	1,54	1,43	1,75
	0,69	1,08	1,45	1,10	1,35	1,28	1,47
	0,64	1,05	1,28	1,06	1,23	1,18	1,30
	0,59	1,03	1,17	1,04	1,15	1,12	1,19

	0,54	1,01	1,10	1,03	1,09	1,08	1,12
	0,49	1,01	1,06	1,02	1,06	1,05	1,08
Limites de controle	[1;1]	[0,86;1]	[1;1]	[0,91;1]	[0,89;1]	[0,87;1]	

Tabela 2: Comportamento dos estimadores para n=7 e p=0,999

Na Tabela 2, entre as alternativas do estimador tradicional, a melhor opção é OldL e no caso do novo estimador, o que apresentou o melhor ARL0 é o NewL3 com ARL0 de 333 (mais próximo de 370). E entre estas duas possibilidades, o que se aproxima mais do valor de referência é NewL3. Como uma tentativa de fazer uma comparação mais justa entre os ARL1 obtidos por diferentes estimadores uma possibilidade é ajustá-los linearmente (em inglês naively). Por exemplo, o valor atualizado de ARL1 14.72 (na coluna OldL, na base de ARL0 de 333) seria 34.21; 2,84 seria 6.60 e assim sucessivamente.

As Tabelas 3 e 4 apresentadas a seguir fazem uma comparação entre os estimadores para diferentes valores de n sendo o valor de fração de conformidade p quando o processo está sob controle em $p_0=0,95$ e $p_0=0,99$, respectivamente. Para ambos os estimadores, apresenta-se a melhor opção (tanto do estimador tradicional como o novo estimador) para um tamanho de amostra n em questão. No caso do estimador novo, escolheu-se também a melhor combinação n_1 e n_2 , (identificada como observação nas Tabelas 3 e 4). Pode-se observar que, para o caso do novo estimador, com o aumento do tamanho da amostra, o valor de ARL₀ tende a se aproximar do valor de referência 370 e apresentar uma estabilidade em torno desse valor. Já o estimador antigo apresenta uma instabilidade de valores principalmente no caso de $p_0=0,99$, ou seja, para um valor mais alto de qualidade.

n	ARL ₀		Observação
	\hat{p}	\tilde{p}	
5	44,26	43,71	n1=2 e n2 =3
10	86,93	183,39	n1=2 e n2=8
15	182,91	371,71	n1=7 e n2=8
20	388,51	374,27	n1=3 e n2=17
25	139,57	379,45	n1=6 e n2=19
30	304,65	368,18	n1=12 e n2=18

Tabela 3 – Comparação entre os estimadores para vários n e p in control=0,95

n	ARL ₀		Observação
	\hat{p}	\tilde{p}	
5	20,40	49,77	n1=2 e n2 =3
10	234,40	347,42	n1=4 e n2=6
15	103,84	412,35	n1=2 e n2=13
20	59,31	397,61	n1=7 e n2=13
25	512,64	340,33	n1=7 e n2=18
30	301,41	370,97	n1=12 e n2=18

Tabela 4 – Comparação entre os estimadores para vários n e p in control=0,99

Tabela 5 apresenta uma outra forma de comparação de desempenho feita entre os valores de ARL1 para um caso em que o valor da fração conforme p quando o processo sob controle é $p_0=0,99$ e o fora de controle é $p_1=0,95$. Da mesma forma que nas tabelas anteriores, para ambos os estimadores, utiliza-se a combinação que apresenta melhor valor de ARL0 já que

ele é o fator mais determinante neste caso. Observa-se que, para o novo estimador com um aumento no tamanho da amostra, o valor de ARL1 tende a decrescer. Isso nos permite concluir que para amostras ainda consideradas pequenas ($n < 30$) o valor de ARL1 se torna constantemente decrescente e estável, o que não acontece no caso do outro estimador.

n	ARL ₁		Observação
	\hat{p}	\tilde{p}	
5	4,42	9,82	n1=2 e n2 =3
10	11,61	16,42	n1=4 e n2=6
15	5,85	21,60	n1=2 e n2=13
20	3,79	12,29	n1=7 e n2=13
25	7,87	9,64	n1=7 e n2=18
30	5,32	6,16	n1=12 e n2=18

Tabela 5 - Comparação entre os estimadores para vários tamanhos de amostra n ($p_0=0,99$ e $p_1 =0,95$)

4. Conclusão

A grande discussão que gira em torno deste projeto é a de saber o quanto o novo estimador se aproxima do antigo, podendo apresentar resultados melhores ou piores que este e quando (em que casos) estes resultados são mais favoráveis. Contudo, apesar das possibilidades serem inúmeras, alguns pontos foram observados e mostram o comportamento positivo e negativo do estimador.

Primeiramente, nota-se que para um mesmo valor de n e da fração de conformidade quando o processo está sob controle, obtém-se melhores valores de ARL₀ com o novo estimador.

Contudo, quando se compara os valores de ARL₁ para vários valores de p fora de controle, alguns cuidados devem ser tomados. Os valores obtidos utilizando o método tradicional geralmente fornecem valores de ARL₀ muito menores que o valor de referência e como consequência pode subestimar os valores de ARL₁ ou no caso de ARL₀ muito maiores que o valor de referência, os mesmos estão superestimados.

Uma observação interessante em relação ao novo estimador: os valores de ARL₁ diminuem, conforme aumenta o tamanho da amostra os valores de ARL₁.

Existem alguns outros casos em que os estimadores se apresentaram bastante semelhantes, tanto quando se comparam os ARL₀'s quanto os ARL₁'s. Nestes casos, é indiferente a aplicação dos estimadores uma vez que ambos, em termos de custos, são iguais.

É importante ressaltar que análises estão sendo feitas para valores altos de p já que deseja-se encontrar um melhor estimador para casos em que exige-se altos padrões de qualidade e o custo das amostras é alto também exigindo baixos tamanhos amostrais.

Referências

- BÖHNING, D. & VIWATWONGKASEM, C.** Revisiting proportions estimators. Statistical Methods in Medical Research; 2005; 14: 147-169.
- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. & CARPINETTI, L.C.R.** Controle Estatístico de Qualidade. Atlas, São Paulo 2004.
- GETZ, K.** VBA Developer's Handbook. Sybex, San Francisco, 2000.
- JELÉN, B. Macros.** VBA para Microsoft Excel. Elsevier Editora, Rio de Janeiro, 2004.
- MONTGOMERY, D.C.** Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade. LTC, Rio de Janeiro, 2004.

